Sapienza, Università di Roma
Dipartimento di Matematica "G.Castelnuovo"

Note di base di

Analisi Matematica

Parte terza

versione 1.2 (18 novembre 2012)

Lamberto LAMBERTI
Corrado MASCIA

Indice

CAPITOLO 1

Analisi locale e analisi globale

Una proprietà di una funzione f è *locale* se dipende dal comportamento della funzione nell'intorno di un punto x. Continuità e derivabilità in x sono proprietà locali. Una proprietà di una funzione f è *globale* se vale in tutto l'insieme di definizione della f. Ad esempio le funzioni $e^x, \arctan x, x^3, \dots$ sono funzioni globalmente monotòne crescenti e pertanto (globalmente) invertibili. Nella prima parte di questo capitolo approfondiamo l'uso della derivazione per determinare proprietà locali di funzioni: massimi/minimi relativi, punti di singolarità,... Torneremo più avanti sulle proprietà globali, concentrandoci sul problema di determinare massimi e minimi (assoluti) di una funzione assegnata.

1. Punti stazionari

Abbiamo già definito massimo e minimo di una funzione: data $f : D \to \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in D$ è punto di massimo di f se $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni $x \in D$. Il valore $f(x_0) = \max_{x \in D} f(x)$ è il massimo della funzione f in D. Analogo per i minimi.

L'esistenza di massimo e/o minimo è una proprietà globale della funzione. E' utile introdurre un analogo locale del concetto di massimo e di minimo.

Definizione 1.1. Massimo e minimo locale. *Il punto $x_0 \in D$ è un* punto di massimo locale *(o* relativo*) e il valore $f(x_0)$ è un* massimo locale *(o* relativo*) di f se esiste un intorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ del punto x_0 tale che $f(x_0)$ è il massimo di f in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$:*

$$\exists\, \delta > 0 \qquad \textit{tale che} \qquad f(x) \leq f(x_0) \qquad \forall x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Analogamente per il minimo locale*.*

Un punto x_0 che sia o di massimo o minimo locale è un punto di estremo locale*.*

Per distinguere in modo più chiaro il massimo e il minimo dagli analoghi concetti locali, si parla di massimo globale (o assoluto) e di minimo globale (o assoluto). Dalla definizione segue immediatamente che se x_0 è punto di massimo globale, allora è anche punto di massimo locale. Il viceversa invece non è vero, come nel caso del grafico rappresentato in Figura 1. Per un esempio analitico, si può considerare la funzione

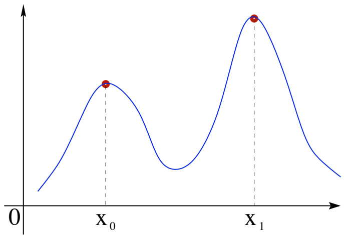

FIGURA 1. Il punto x_0 è di massimo locale, ma non globale; il punto x_1 è di massimo globale.

$f(x) = x^4 - x^2$. Dato che $f(0) = 0$ e $f(x) \leq 0$ per $x \in (-1, 1)$, il punto $x = 0$ è un punto di massimo locale, ma non è di massimo globale dato che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.

DEFINIZIONE 1.2. *Sia $D \subset \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è* interno a *D se esiste un intorno di x_0 interamente contenuto in D, cioè se esiste $\delta > 0$ per cui $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D$.*

Se una funzione f ha un massimo o un minimo locale in corrispondenza di un punto x_0 interno all'insieme di definizione e in cui la funzione è derivabile, necessariamente

$$f'(x_0) = 0.$$

Basta infatti pensare alla necessaria posizione orizzontale della retta tangente (Fig.2(a)). Per una dimostrazione analitica, sia x_0 un punto di massimo locale interno e supponiamo f derivabile in x_0. Dato che $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \leq 0 & \forall\, x_0 < x < x_0 + \delta, \\ \geq 0 & \forall\, x_0 - \delta < x < x_0, \end{cases}$$

Passando al limite per $x \to x_0$ si deduce $f'(x_0) = 0$.

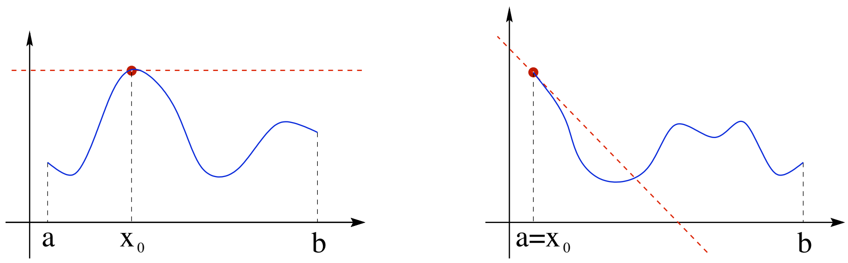

FIGURA 2. Se il punto di massimo locale è interno, la tangente è orizzontale. Se, invece, si trova sul bordo... non è detto!

Nel caso in cui il punto x_0 non sia interno al dominio, non è detto che la retta tangente sia orizzontale (Fig.2(b)). Conclusioni analoghe per i punti di minimo.

Pertanto, risolvere l'equazione $f'(x) = 0$ permette di determinare i possibili candidati a punti di minimo o massimo locale *interno* in cui f è *derivabile*. È comunque possibile che un estremo locale cada in un punto in cui la funzione non è derivabile; ad esempio $f(x) = |x|$ ha un minimo (globale) in $x = 0$ dove non ha retta tangente.

DEFINIZIONE 1.3. Punto stazionario. *Sia $f : D \to \mathbb{R}$. Un punto x_0, interno a D, tale che $f'(x_0) = 0$ si dice* punto stazionario[1] *(o* punto critico*) della funzione f.*

Equivalentemente, si può affermare che i punti critici di f sono i punti x per cui la tangente al grafico di f in $(x, f(x))$ è orizzontale.

ESERCIZIO 1.4. *Determinare i punti critici di $f(x) = x^7 + 14x^4 + 1$.*

Classificazione dei punti stazionari. Se x_0 è un punto di massimo o di minimo locale interno e f è derivabile in x_0, necessariamente x_0 è un punto critico, cioè $f'(x_0) = 0$. *Il viceversa non è vero*: esistono punti x_0 tali che $f'(x_0) = 0$, ma che non sono né punti di massimo locale, né punti di minimo locale. Ad esempio, la funzione $f(x) = x^3$ è strettamente crescente (quindi non ha né punti di massimo né punti di minimo in $\mathbb{R}$), ma $f'(x) = 3x^2$ si azzera nel punto $x = 0$.

Conoscendo il segno della derivata prima alla destra e alla sinistra del punto in questione, grazie al legame tra monotonia e segno di f', si può individuare quando un punto stazionario sia di massimo o di minimo. Supponiamo f derivabile in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ con $\delta > 0$, allora

$$f'(x) \begin{cases} \geq 0 & x_0 - \delta < x < x_0, \\ \\ \leq 0 & x_0 < x < x_0 + \delta, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad x_0 \quad \text{punto di massimo locale.}$$

Analogamente, per il minimo, vale

$$f'(x) \begin{cases} \leq 0 & x_0 - \delta < x < x_0, \\ \\ \geq 0 & x_0 < x < x_0 + \delta, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad x_0 \quad \text{punto di minimo locale.}$$

ESERCIZIO 1.5. *Determinare i punti critici della funzione $f(x) = x^2(3x^2 - 8x + 6)$ e dire quali di essi sono punti di massimo o di minimo.*

Soluzione. La derivata prima della funzione è

$$f'(x) = 2x(3x^2 - 8x + 6) + x^2(6x - 8) = 12x(x^2 - 2x + 1) = 12x(x - 1)^2.$$

[1] Il termine *stazionario* è ereditato dalla cinematica. Se x è la posizione di un punto su cui agisce una forza conservativa con potenziale dato dalla funzione $f = f(x)$, allora l'accelerazione del punto è proporzionale a f'. Se il punto viene collocato a riposo nella posizione x_0 e $f'(x_0) = 0$, allora, dato che l'accelerazione (cioè la variazione di velocità) è nulla, il punto *stazionerà* nella posizione x_0 per ogni tempo successivo

I punti critici sono $x = 0$ e $x = 1$; il punto $x = 0$ è punto di minimo, mentre il punto $x = 1$ non è né di massimo né di minimo. Il grafico qualitativo della funzione f è in Figura 3.

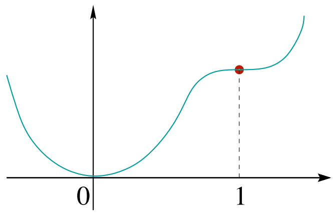

FIGURA 3. Il grafico di $f(x) = x^2(3x^2 - 8x + 6)$ dell'Esercizio 1.5.

Se x_0 è un punto critico di f, per riconoscere se f' cambia segno traversando x_0, basta considerare il segno di f'', qualora esista:

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) > 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 \quad \text{punto di minimo locale;}$$

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) < 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 \quad \text{punto di massimo locale.}$$

Si noti che si tratta solo di condizioni sufficienti: ad esempio, la funzione $f(x) = x^4$ ha un punto di minimo in 0, ma $f''(0) = 0$.

ESEMPIO 1.6. *Una raffinatezza per buongustai.* In genere, si immagina il grafico di una funzione vicino al punto di minimo x_0 con $f'(x) \leq 0$ per $x_0 - \delta < x < x_0$ e $f'(x) \geq 0$ per $x_0 < x < x_0 + \delta$. Esistono però anche situazioni in cui una funzione alla sinistra del punto di minimo non è decrescente e alla destra non è crescente. Scetticismo? Ecco un esempio:

$$f(x) = \begin{cases} x^2\left(2 - \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

La funzione f è derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e

$$f(x) \geq 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \text{e} \qquad f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0.$$

Il punto $x = 0$ è punto di minimo globale, e quindi di minimo locale. Necessariamente $f'(0) = 0$ (come si può ottenere anche tramite il calcolo del limite del rapporto incrementale). La derivata prima di f nei punti $x \neq 0$ è

$$f'(x) = 2x\left(2 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) + \cos\left(\frac{1}{x}\right),$$

quindi, per $x \approx 0$, si ha $f'(x) \approx \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, che assume valori sia positivi che negativi.

2. Analisi al microscopio

Nello studio dell'andamento qualitativo del grafico di una funzione, è interessante approfondire quello che succede in prossimità di certi punti significativi. Qui consideriamo come punti "significativi" quelli che corrispondono ad una delle seguenti situazioni:

(a) punti x_0 che non sono nell'insieme di definizione di f, ma che sono sul "bordo" (ad esempio, se $f : (a, b] \to \mathbb{R}$, il punto $x_0 = a$, oppure se $f : [a, b] \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$, $x_0 = c$);

(b) punti x_0 dell'insieme di definizione in cui f non è continua;

(c) punti x_0 in cui f è continua, ma non derivabile.

Nei casi (b) e (c) si parla talvolta di *punti di singolarità*.

Asintoti verticali. Sia nel caso (a) che nel caso (b), si calcola il limite

$$\lim_{x \to x_0} f(x).$$

Se il limite è $+\infty$ o $-\infty$, la funzione ha in $x = x_0$ un asintoto verticale. Lo stesso è vero

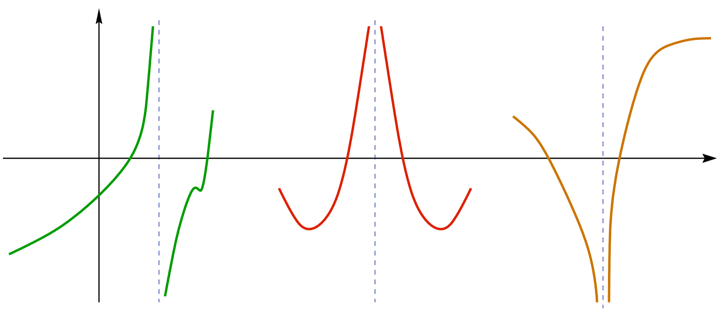

FIGURA 4. Alcuni esempi di asintoti verticali.

nel caso in cui sia il limite destro che il limite sinistro tendano a $+\infty$ o $-\infty$, ma con segni opposti. In generale, zeri del denominatore di una funzione razionale (che non siano anche zeri del numeratore), corrispondono a punti di asintoto verticale.

Ci sono situazioni più esotiche: il limite potrebbe non esistere oppure potrebbero esistere i limiti destro e sinistro, ma con valori diversi,... A voi individuare possibili esempi e corrispondenti grafici.

ESERCIZIO 2.1. *Studiare la funzione* $f(x) = \arctan(1/x)$ *vicino al punto* $x = 0$.

Punti angolosi e cuspidi. Consideriamo il caso (c), quindi supponiamo x_0 tale che la funzione f sia continua in x_0, ma non derivabile. Se esistono finiti i limiti destro e sinistro della derivata prima

$$\lim_{x\to x_0^\pm} f'(x) = \ell^\pm,$$

dato che f non è derivabile in x_0, deve essere $\ell^+ \neq \ell^-$. Un punto di questo genere si chiama punto angoloso (o spigolo). Per disegnarlo correttamente è possibile tracciare le rette tangenti destra e sinistra, cioè le rette di equazione $y = f(x_0) + \ell^\pm(x - x_0)$.

Nel caso in cui i limiti destro e sinistro siano $\pm\infty$ si possono avere due situazioni differenti. Se entrambi sono $+\infty$ (o $-\infty$), cioè se

$$\lim_{x\to x_0^\pm} f'(x) = +\infty \quad (-\infty),$$

il punto x_0 è un punto a tangente verticale. Se invece i limiti destro e sinistro sono $\pm\infty$, ma con segni opposti, il punto x_0 è una cuspide del grafico di f. Per un esempio di cuspide, si consideri la funzione $f(x) = \sqrt{|x|}$. In questo caso

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} -\frac{1}{2\sqrt{-x}} = -\infty.$$

Ovviamente sono possibili comportamenti analoghi a quelli descritti, ma misti: ad

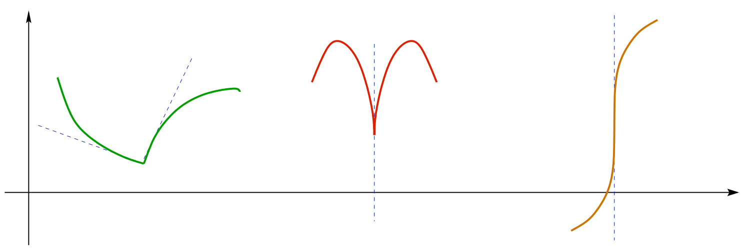

FIGURA 5. Da sinistra: un punto angoloso, una cuspide e un punto a tangente verticale.

esempio, una funzione può avere derivata prima che tende ad un valore dato da destra e che diverge da sinistra, o tutte le varianti che la mente è in grado di inventare.

3. Comportamento asintotico

Se la funzione f è definita in insiemi illimitati, è interessante studiarne il comportamento per $x \to \pm\infty$. Per fissare le idee, consideriamo una funzione f definita su una semiretta $[a, +\infty)$ con $a \in \mathbb{R}$. In questo caso si vuole stabilire cosa succeda per $x \to +\infty$, cioè determinare il *comportamento asintotico per* $x \to +\infty$. Considerazioni analoghe valgono per il caso di semirette del tipo $(-\infty, a]$, per $\mathbb{R}$, e, in generale, per domini illimitati.

La prima operazione sensata è il calcolo del limite per $x \to +\infty$. Se

$$\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R},$$

si dice che la funzione f tende asintoticamente ad ℓ, oppure che f ha un asintoto orizzontale (di equazione $y = \ell$) per $x \to +\infty$. Il grafico della funzione f si avvicina alla retta di equazione $y = \ell$ per x sempre più grandi. Per un disegno più preciso, si può studiare il segno della funzione $f(x) - \ell$, che indica se il grafico della funzione f sia al di sopra o al di sotto dell'asintoto.

Esempio 3.1. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} \qquad x \in [1, +\infty).$$

In questo caso,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2,$$

quindi la funzione ha l'asintoto orizzontale di equazione $y = 2$. Dato che

$$f(x) - \ell = \frac{2x^2}{x^2+1} - 2 = -\frac{2}{x^2+1} < 0,$$

quindi f tende a $y = 2$ dal basso. A voi il gusto di tracciare il grafico di questa funzione.

Invece, la funzione

$$f(x) = \frac{2x^2 \sin x}{x^2+1} \qquad x \in [1, +\infty),$$

non ha limite per $x \to +\infty$ e quindi non ha asintoto orizzontale.

Se il limite della funzione f esiste, ma è $+\infty$ o $-\infty$, evidentemente non c'è asintoto orizzontale. Che cosa si può dire in questo caso? È possibile che la funzione tenda ad un asintoto obliquo, ossia è possibile che esistano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{x\to+\infty} \big[f(x) - (ax+b)\big] = 0. \tag{1}$$

Questa proprietà indica che il grafico della funzione f si avvicina al grafico della retta $y = ax+b$ per $x \to +\infty$. Il problema è: *come determinare (qualora esistano) le costanti a e b?* Supponiamo che valga (1), allora

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - ax}{x} + a = a.$$

Una volta noto a, è possibile determinare b (qualora esista) calcolando

$$\lim_{x\to+\infty} \big[f(x) - ax\big] = b.$$

Ecco, quindi, le istruzioni per determinare la presenza di un asintoto obliquo:

i. calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$: se il limite esiste finito, c'è un asintoto orizzontale (fine dello studio a $+\infty$), se il limite non esiste, non c'è né asintoto obliquo, né asintoto orizzontale (fine dello studio a $+\infty$), se il limite è $+\infty$ o $-\infty$ si va al punto (ii);

ii. calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x$: se il limite esiste finito, il suo valore è a e si va al punto (iii), se il limite non esiste o se vale $\pm\infty$, non c'è asintoto obliquo (fine dello studio a $+\infty$);

iii. calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty} \big[f(x)-ax\big]$: se il limite esiste finito, il suo valore è b, la funzione ha asintoto obliquo di equazione $y = ax + b$, se il limite non esiste o se vale $\pm\infty$, non c'è asintoto obliquo (fine dello sudio a $+\infty$).

Esempio 3.2. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{x^2-1}{3x+1} \qquad x \in [0, +\infty).$$

Si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{3x+1} = +\infty,\\
\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{3x(x+1)} = \frac{1}{3} =: a,\\
\lim_{x\to+\infty} f(x) - \frac{x}{3} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{3x+1} - \frac{x}{3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3-x}{3(3x+1)} = -\frac{1}{9} =: b.
\end{aligned}$$

Quindi la funzione ha un asintoto obliquo di equazione $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}$. Anche in questo caso, per disegnare un grafico più preciso, si può studiare il segno della funzione

$$f(x) - (ax+b) = \frac{x^2-1}{3x+1} - \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right) = -\frac{8}{9(3x+1)} < 0 \qquad \forall\, x > -\frac{1}{3}.$$

La differenza è negativa, quindi la funzione tende all'asintoto dal basso.

Dopo il punto (i), se esiste finito $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$, allora a è uguale al valore di questo limite e si può proseguire direttamente dal punto (iii). Se invece il limite di f' non esiste, bisogna necessariamente seguire il procedimento esposto sopra. Ad esempio, per $f(x) = x + \dfrac{\sin(x^2)}{x}$, si ha

$$f'(x) = 1 + 2\cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2},$$

che non ammette limite per $x \to +\infty$, ma è facile vedere che la funzione ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ di equazione $y = x$.

Esercizio 3.3. *Sia $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ con p polinomio di grado k e q polinomio di grado h. Dimostrare che:*
(i) f ha un asintoto orizzontale se e solo se $k \leq h$;
(ii) f ha un asintoto obliquo, non orizzontale, se e solo se $k = h + 1$.

Altri profili asintotici. Il caso dell'asintoto obliquo è solo una situazione molto particolare: può capitare che una funzione tenda asintoticamente ad una funzione, che non sia un polinomio di primo grado. Consideriamo, ad esempio,

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x - 2}.$$

Grazie all'algoritmo di divisione di polinomi, possiamo riscrivere questa funzione come

$$f(x) = x^2 + 2x + 4 + \frac{9}{x - 2}.$$

Da questa espressione è immediato vedere che

$$\lim_{x \to \pm\infty} \big[f(x) - (x^2 + 2x + 4)\big] = 0,$$

e quindi il grafico di f tende asintoticamente alla parabola $y = x^2 + 2x + 4$.

Riconsideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{2x^2 \sin x}{x^2 + 1} \qquad x \in [1, +\infty).$$

Dato che $\frac{2x^2}{x^2+1} \to 2$ per $x \to +\infty$, è sensato immaginare che questa funzione "assomigli" alla funzione $f(x) = 2 \sin x$ per $x \to +\infty$. Calcoliamo la differenza tra $f(x)$ e $2 \sin x$ e vediamo se è infinitesima:

$$\left| \frac{2x^2 \sin x}{x^2 + 1} - 2 \sin x \right| = \frac{2\,|\sin x|}{1 + x^2} \leq \frac{2}{1 + x^2} \to 0 \qquad \text{per} \quad x \to +\infty.$$

Quindi

$$f(x) = \frac{2x^2 \sin x}{x^2 + 1} = 2 \sin x + h(x) \qquad \text{con} \qquad \lim_{x \to +\infty} h(x) = 0.$$

In generale se siamo in grado di riscrivere la funzione f nella forma

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

con g funzione di cui si conosce il grafico e $h \to 0$ per $x \to \infty$, il grafico della funzione f tende verso quello della funzione g. Non esiste alcuna strategia generale per determinare una decomposizione di questo genere.

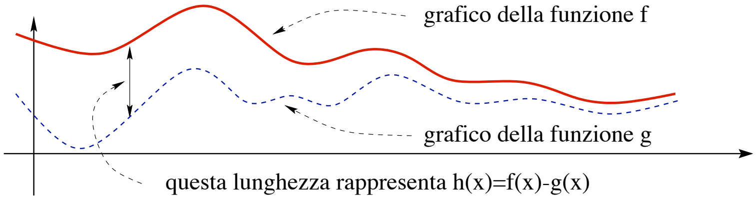

FIGURA 6. Il grafico di f con $f(x) = g(x) + h(x)$ e h infinitesima per $x \to +\infty$.

4. Funzioni convesse

Come già detto, ripetuto ed usato ampiamente, il segno della derivata prima dà informazioni relative alla monotonia della funzione f. Quale ruolo gioca, invece, il segno della derivata seconda? Partiamo da una definizione.

DEFINIZIONE 4.1. *Una funzione* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *è* convessa in $[a, b]$ *se*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \qquad \forall\, x, y \in [a, b] \quad \forall\, t \in (0, 1). \tag{2}$$

Una funzione per cui valga la disuguaglianza opposta si dice concava*.*

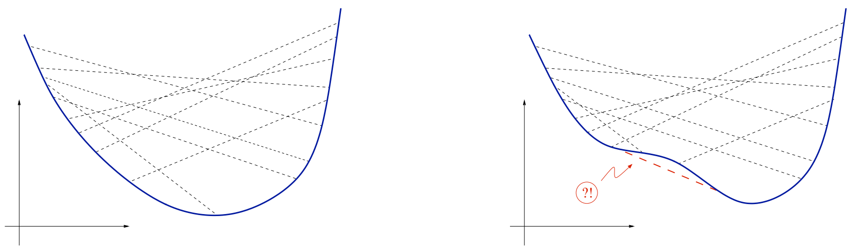

FIGURA 7. Una funzione convessa ed una non convessa.

Dalla definizione segue che se f è concava, allora $-f$ è convessa, e viceversa. Quindi studiare la convessità è sufficiente per comprendere anche la concavità.

OSSERVAZIONE 4.2. Esiste una maniera diversa di introdurre il concetto di convessità. Un sottoinsieme E del piano è convesso se scelta una qualsiasi coppia di punti P e Q appartenenti ad E, il segmento che li congiunge è interamente contenuto in E. Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è convessa in $[a, b]$ se l'insieme $E := \{(x, y) : y \geq f(x)\}$, composto dai punti che si trovano sopra il suo grafico (detto epigrafico) è un insieme convesso. Le due definizioni sono comunque equivalenti (sapete dimostrarlo?).

Cerchiamo di capire il significato geometrico della condizione (2). Fissiamo $x = \bar{x}$ e $y = \bar{y}$ con $\bar{x} < \bar{y}$. Per $t \in (0, 1)$, definiamo $z(t) := t\bar{x} + (1-t)\bar{y} \in (\bar{x}, \bar{y})$. Scriviamo la retta che passa per $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ e $(\bar{y}, f(\bar{y}))$:

$$\Phi(x) = f(\bar{x}) + \frac{f(\bar{y}) - f(\bar{x})}{\bar{y} - \bar{x}}(x - \bar{x}),$$

e calcoliamo questa funzione in $z(t)$. Dato che

$$\begin{aligned}\Phi(z(t)) &= f(\bar{x}) + \frac{f(\bar{y}) - f(\bar{x})}{\bar{y} - \bar{x}}(t\bar{x} + (1-t)\bar{y} - \bar{x}) \\ &= f(\bar{x}) + \frac{f(\bar{y}) - f(\bar{x})}{\bar{y} - \bar{x}}(1-t)(\bar{y} - \bar{x}) \\ &= f(\bar{x}) + (f(\bar{y}) - f(\bar{x}))(1-t) = tf(\bar{x}) + (1-t)f(\bar{y}),\end{aligned}$$

la condizione (2), si può riscrivere come

$$f(z(t)) \leq \Phi(z(t)) \qquad \forall\, x, y \in [a,b] \quad \forall\, t \in (0,1).$$

Questa scrittura ha un interpretazione in termini di grafico immediata: *una funzione f è convessa, se per ogni scelta di x e y, il grafico di f giace al di sotto della retta secante che congiunge i punti $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ nell'intervallo di estremi x e y.*

Esercizio 4.3. *Se f e g sono due funzioni convesse in $[a,b]$, allora una tra $\max\{f,g\}$ e $\min\{f,g\}$ è convessa. Sapete dire quale?*

Proposizione 4.4. *Una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è convessa in $[a,b]$ se e solo se*

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \tag{3}$$

per ogni x, y, z tali che $a \leq x < z < y \leq b$.

La dimostrazione della formula (3) si ottiene riscrivendo in termini di rapporti incrementali la formula (2). I dettagli sono lasciati alla buona volontà del lettore.

La proprietà (3) può essere interpretata graficamente in termini di monotonía delle pendenza delle secanti: fissato y, la funzione

$$\phi(x) := \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

è crescente in x. Quando la funzione è derivabile, questa proprietà diviene una richiesta di monotonia della derivata prima f'. Nel caso in cui la funzione f sia derivabile due volte, la monotonía della funzione f' può essere tradotta in termini di segno della derivata seconda f''.

Teorema 4.5. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Allora*

(i) se f è derivabile una volta, la funzione f è convessa in $[a,b]$ se e solo se f' è non decrescente in $[a,b]$;

(ii) se f è derivabile due volte, la funzione f è convessa in $[a, b]$ se e solo se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$.

Per le funzioni concave, vale un risultato analogo sostituendo a "f' non decrescente" la frase "f' non crescente" e a "$f'' \geq 0$" la frase "$f'' \leq 0$".

Dal Teorema 4.5(i) discende un'altra interpretazione geometrica della convessità: *se la funzione f è derivabile e convessa, il suo grafico è interamente al di sopra di ogni retta tangente ad esso.* Infatti, scriviamo la differenza tra f e la retta tangente in $(x_0, f(x_0))$

$$R(x; x_0) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0),$$

con l'obiettivo di dimostrare che se f è convessa, la funzione $R(x; x_0)$ è positiva. Applichiamo il Teorema di Lagrange e riscriviamo $R(x; x_0)$ come

$$R(x; x_0) = f'(\xi)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \big(f'(\xi) - f'(x_0)\big)(x - x_0).$$

Se $x > x_0$ allora $\xi > x_0$ e quindi, essendo f' crescente, $f'(\xi) > f'(x_0)$. Ne segue che il termine a destra è positivo perché prodotto di termini positivi. Se $x < x_0$ allora $\xi < x_0$ e, sempre per la monotonía di f', $f'(\xi) < f'(x_0)$. Questa volta i due termini sono entrambi negativi, ma comunque il loro prodotto è positivo.

Dimostrazione del Teorema 4.5. (i) Supponiamo che f sia convessa, allora vale la (3). Quindi, passando al limite per $z \to x^+$ si ottiene

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Analogamente, passando al limite nella (3) per $z \to y^-$,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y).$$

Ne segue che $f'(x) \leq f'(y)$ per ogni $x \leq y$.

Viceversa, supponiamo che la funzione f' sia non decrescente e dimostriamo la (2) studiando la funzione differenza

$$F(t) := tf(x) + (1 - t)f(y) - f(tx + (1 - t)y), \qquad t \in [0, 1],$$

con x, y fissati. Consideriamo il caso $y < x$ (l'altro è analogo). Calcolando la derivata di F e applicando il Teorema di Lagrange, si deduce che esiste $\xi \in (y, x)$ tale che

$$F'(t) = f(x) - f(y) - f'(tx + (1 - t)y)(x - y) = \Big[f'(\xi) - f'(tx + (1 - t)y)\Big](x - y).$$

Dato che, per $t \in [0, 1]$, il punto $tx + (1 - t)y$ descrive l'intervallo $[y, x]$, esiste t^* tale che $t^*x + (1 - t^*)y = \xi$. Inoltre, dato che f' è non decrescente, $f'(tx + (1 - t)y) \leq f'(\xi)$

per $t \in [0, t^*]$ e $f'(tx + (1-t)y) \geq f'(\xi)$ per $t \in [t^*, 1]$. Perciò:

$$F'(t) \geq 0 \quad \text{per} \quad t \in [0, t^*] \qquad \text{e} \qquad F'(t) \leq 0 \quad \text{per} \quad t \in [t^*, 1].$$

Perciò il minimo globale della funzione F è assunto in uno degli estremi $t = 0$ o $t = 1$ e, dato che $F(0) = F(1) = 0$, $F(t) \geq 0$ per ogni $t \in [0, 1]$, cioè la formula (2). $\square$

ESERCIZIO 4.6. *Sia f una funzione convessa e derivabile in (a, b). Se esistono $x_0, x_1 \in (a, b)$ con $x_0 \neq x_1$ tali che $f'(x_0) = f'(x_1) = 0$, che cosa si può dedurre sulla funzione f?*

DEFINIZIONE 4.7. *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile due volte. Se x_0 è tale che f'' cambia segno in x_0 (cioè è negativa da una parte e positiva dall'altra), allora x_0 si chiama* punto di flesso *della funzione f.*

Grazie al Teorema 4.5, se f'' ha segno opposto alla destra e alla sinistra di x_0, necessariamente x_0 è un punto di flesso.

ESEMPIO 4.8. Consideriamo la funzione $f(x) = \sin x$. La sua derivata seconda è $f''(x) = -\sin x$, quindi tutti punti della forma $x = k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di flesso.

Per la funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, si ha

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \qquad \Longrightarrow \qquad f''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3},$$

e quindi i punti di flesso di f sono $x = \pm 1/\sqrt{3}$. La funzione f è convessa in $(-\infty, -1/\sqrt{3})$ e in $(1/\sqrt{3}, +\infty)$ e concava in $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.

La convessità è utile per determinare l'esistenza di minimi di una funzione. Infatti, vale la seguente implicazione

$$f \quad \text{convessa}, \quad f'(x_0) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_0 \quad \text{punto di minimo globale.}$$

La dimostrazione è lasciata per esercizio. Analogamente, per le funzioni concave ed i punti di massimo. Chiaramente se la convessità è solo locale (cioè in un intorno del punto x_0), x_0 è punto di minimo locale.

ESERCIZIO 4.9. *Dimostrare la seguente implicazione*

$$f : [a, b] \to \mathbb{R} \quad \textit{convessa} \quad \Rightarrow \quad f \quad \textit{continua in} \quad (a, b).$$

5. A caccia di massimi e minimi assoluti

Problema 1. Abbiamo già considerato il problema di determinare il cilindro di volume $V = k =$ costante con superficie totale S minima, con l'obiettivo (malcelato) di diventare ricchi grazie all'uso della matematica, applicando il risultato alla costruzione di scatole di fagioli, o, più in generale, di confezioni cilindriche con minima spesa di materiali. La speranza si era presto infranta quando ci siamo resi conto che per via elementare non riuscivamo a determinare il minimo della funzione S, cioè a risolvere il problema (r =raggio della base del cilindro)

$$\text{determinare il minimo di } S(r) = 2\pi\left(r^2 + \frac{k}{\pi r}\right) \qquad r > 0.$$

Torniamo al problema con la conoscenza delle derivate e studiamo la monotonìa di S:

$$\frac{dS}{dr} = 2\pi\left(2r - \frac{k}{\pi r^2}\right) = \frac{4\pi}{r^2}\left(r^3 - \frac{k}{2\pi}\right).$$

Perciò $S'(r) \geq 0$ se e solo se $r \geq r^*$ dove $r^* = (k/2\pi)^{1/3}$. Quindi la funzione S

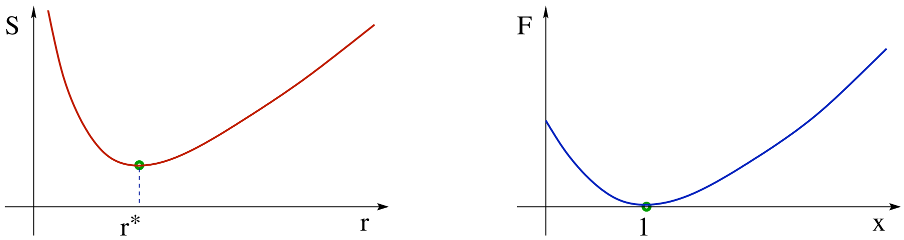

FIGURA 8. (a) Il grafico della funzione $S(r) = 2\pi\left(r^2 + \frac{k}{\pi r}\right)$; (b) il grafico della funzione $F(x) = x^p - 1 - p(x-1)$, $p > 1$.

è decrescente in $(0, r^*)$ ed è crescente in (r^*, ∞). Ne segue che il punto di minimo richiesto esiste ed è proprio $r = r^*$ (Fig.8(a)). Problema risolto, corriamo in fabbrica!

Problema 2. Vogliamo dimostrare la disequazione

$$x^p - 1 \geq p(x-1) \qquad \forall p > 1, \quad \forall x \geq 0.$$

Fissiamo $p > 1$ e consideriamo la funzione

$$F(x) = x^p - 1 - p(x-1) \qquad x \geq 0.$$

Dato che $F'(x) = p(x^{p-1} - 1)$, $F'(x) < 0$ per $x \in (0,1)$ e $F'(x) > 0$ per $x \in (1, +\infty)$. Quindi la funzione F è decrescente in $[0,1)$ e crescente in $(1,+\infty)$ e $x = 1$ è un punto di minimo. Ne segue che $F(x) \geq F(1) = 0$, da cui la conclusione (Fig.8(b)).

Problema 3. Siano $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ assegnati. Supponiamo di voler determinare $x \in \mathbb{R}$ tale che sia minima la quantità

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - x)^2. \tag{4}$$

Possiamo immaginare che i valori a_i provengano da misurazioni di un fenomeno sotto osservazione e che si stia cercando un valore medio per questi numeri, che minimizzi l'errore commesso misurato dal valore in (4). Consideriamo la funzione $F(x) = \sum_{i=1}^{n}(a_i - x)^2$ e calcoliamone la derivata:

$$F'(x) = -2\sum_{i=1}^{n}(a_i - x) = -2\left[\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} x\right] = 2n\left[x - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right].$$

La funzione F è decrescente a sinistra di $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ e crescente a destra. Il valore

$$x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

è il punto di minimo (e coincide con la media aritmetica di $a_1, \dots, a_n$).

Esercizio 5.1. *Dati $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, determinare x che minimizzi $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(a_i - x)^2$ dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ sono pesi (positivi) assegnati.*

I problemi che abbiamo appena presentato mostrano alcune tra le miriadi di situazioni in cui si pone il problema: data una funzione f, come determinarne massimo e minimo globali (qualora esistano)? Proviamo ad affrontare il problema in generale.

Supponiamo di lavorare con una funzione f definita nell'intervallo $[a, b]$ e continua. Grazie al teorema di Weierstrass, l'ipotesi di continuità garantisce l'esistenza del massimo e del minimo assoluti. Abbiamo già visto che le soluzioni di $f'(x) = 0$ (cioè i punti critici di f) permettono di determinare i possibili candidati a punti di minimo o massimo locale *interno derivabile*. Chiaramente, è possibile che un estremo locale cada in un punto in cui la funzione non è derivabile. Quindi, la strategia per individuare il massimo ed il minimo di una funzione continua in $[a, b]$ è la seguente:

- $\star$ determinare l'insieme $\mathcal{S}$ dei punti stazionari in (a, b);
- $\star$ determinare l'eventuale insieme $\mathcal{N}$ dei punti in cui f non è derivabile;
- $\star$ calcolare la funzione in $\mathcal{S}$, in $\mathcal{N}$ e negli estremi dell'intervallo a e b.
- $\star$ individuare il più grande e il più piccolo tra i valori calcolati.

Esercizio 5.2. *Determinare il massimo ed il minimo assoluti di*

$$f(x) = (x^2 - 5x + 7)e^x \qquad x \in [0, 2].$$

Soluzione. La funzione f è derivabile dappertutto. Per determinare i punti singolari:

$$f'(x) = (2x - 5)e^x + (x^2 - 5x + 7)e^x = (x^2 - 3x + 2)e^x = (x - 2)(x - 1)e^x.$$

Quindi $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 1$ o $x = 2$. L'insieme dei punti critici *interni* è $\mathcal{S} = \{1\}$. Dato che $f(0) = 7 < f(2) = e^2 < f(1) = 3e$, si ha

$$\min_{x\in[0,2]} f(x) = f(0) = 7, \qquad \max_{x\in[0,2]} f(x) = f(1) = 3e,$$

che è quanto richiesto dall'esercizio.

Spesso è utile conoscere il massimo del modulo di una funzione assegnata f, cioè risolvere il problema

$$\text{data } f : [a,b] \to \mathbb{R} \quad \text{continua,} \quad \text{calcolare } \max_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

In questo caso, si può procedere come detto sopra, o, alternativamente, determinare il massimo ed il minimo della funzione f in $[a,b]$ e poi sfruttare la relazione (evidente?)

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x)| = \max\Big\{ \big|\max_{x\in[a,b]} f(x)\big|, \big|\min_{x\in[a,b]} f(x)\big| \Big\}.$$

ESERCIZIO 5.3. *Calcolare* $\max\{|x^2 - 1| : x \in [-1,2]\}$.

Nel caso in cui si studi una funzione f continua, ma definita su un dominio illimitato (ad esempio, $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$), le ipotesi del Teorema di Weierstrass non sono soddisfatte e quindi non è detto che esistano il massimo ed il minimo della funzione. Comunque ha senso domandarsi: *quanto valgono l'estremo superiore e l'estremo inferiore? Nel caso in cui siano finiti, si tratta di massimo o di minimo?* La strategia per risolvere questo problema è simile a quanto appena visto. Il punto che bisogna modificare è quello relativo al calcolo della funzione negli estremi dell'intervallo. In questo caso almeno uno degli estremi dell'intervallo sarà $+\infty$ o $-\infty$ e le espressioni $f(+\infty)$ e $f(-\infty)$, in generale, non hanno senso, ma vanno sostituite con $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$. Vediamo la procedura negli esercizi che seguono.

ESERCIZIO 5.4. *Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore della funzione* $f(x) = e^{x^2}$ *in* $\mathbb{R}$ *e dire se si tratta di massimo e minimo.*

Soluzione. L'estremo superiore è presto detto: dato che $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, è chiaro che $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f = +\infty$. Che possiamo dire sull'estremo inferiore? Visto che la funzione f è continua su $\mathbb{R}$, esistono massimo e minimo di f in $[-M,M]$ per ogni scelta di $M > 0$. Quindi

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \min\left\{ \min_{|x|\le M} f(x), \inf_{|x|>M} f(x) \right\}.$$

Inoltre, dato che $f(x) \to +\infty$ per $x \to \pm\infty$, per M grande, $\min\limits_{|x|\le M} f(x) \le \inf\limits_{|x|>M} f(x)$. Non resta che cercare i punti di minimo relativo in $[-M,M]$. Derivando, $f'(x) = 2xe^{x^2}$ che si azzera se e solo se $x = 0$, quindi l'unico punto di minimo relativo è $x = 0$ che, per quanto detto, è anche minimo assoluto: $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} e^{x^2} = e^0 = 1$.

Esercizio 5.5. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

Dimostrare che la funzione f ammette minimo assoluto su $\mathbb{R}$.

Esercizio 5.6. *Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore della funzione $f(x) = e^{-x^2}$ in $\mathbb{R}$ e dire se si tratta di massimo e minimo.*

Soluzione. La funzione è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e la derivata vale $f'(x) = -2xe^{-x^2}$. Quindi c'è un unico punto critico $x = 0$ in cui la funzione vale $f(0) = 1$. Inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0.$$

Confrontando i valori deduciamo che

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} e^{-x^2} = 0 \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}} e^{-x^2} = f(0) = 1.$$

Dato che l'estremo superiore fa parte dell'insieme immagine, l'estremo superiore è massimo. Invece l'estremo inferiore non è minimo, perchè la funzione f è strettamente positiva.

Analogamente nel caso di funzioni continue definite in insiemi non chiusi, cioè $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ oppure $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, o varianti, non si applica il Teorema di Weierstrass. Anche in questi casi, per determinare l'estremo superiore/inferiore bisogna considerare i limiti agli estremi.

Concludiamo la Sezione, analizzando altri due problemi di massimo e minimo.

Un problema di statica: la puleggia di De L'Hôpital. Consideriamo gli assi cartesiani (x, y) posti in modo che l'asse y sia in verticale rispetto al suolo e che la forza di gravità sia direzionata nel verso delle y negative. Indichiamo con $O = (0, 0)$ e con $A = (a, 0)$ dove $a > 0$ è una lunghezza fissata. Nel punto O, fissiamo una corda di lunghezza b e all'estremità B di questa corda fissiamo una puleggia. Lasciamo pendere per fatti suoi la puleggia e fissiamo una seconda corda di lunghezza ℓ al punto A. Dopo aver fatto passare la seconda corda attraverso la puleggia (quindi facendola passare per il punto B) fissiamo un peso M all'altra estremità. La configurazione finale è disegnata in Figura 9. Il problema è: in quale punto (x, y) si posizionerà il peso M?

Qui stiamo supponendo che l'unica forza esterna che agisce sul sistema è la forza di gravità. Se, inoltre, supponiamo che il peso delle corde e della puleggia sia trascurabile rispetto al peso di M, e che non sia presente nessun tipo di attrito, il peso M si collocherà nella posizione più bassa possibile, cioè minimizzerà il valore y. Quest'affermazione discende dal principio seguente: *la posizione d'equilibrio (stabile) del sistema minimizza l'energia potenziale di M.* Dato che l'energia potenziale di M è della forma $Ay + B$ con $A > 0$, minimizzare l'energia potenziale equivale a minimizzare l'altezza y.

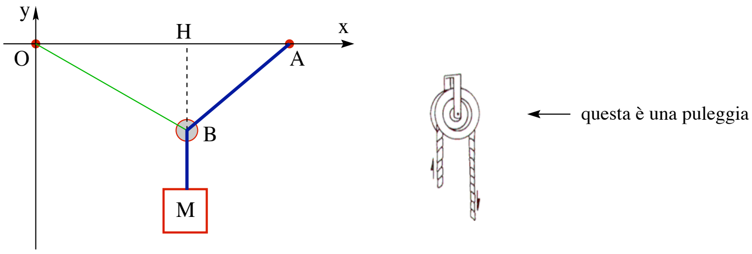

FIGURA 9. La puleggia di De L'Hôpital.

Riscriviamo per chiarezza i dati del problema:

$$\overline{OA} = a, \qquad \overline{OB} = b, \qquad \overline{AB} + \overline{BM} = \ell.$$

L'incognita è la posizione di $M = (x, y)$. Supponiamo inoltre $0 < b < a < \ell$. La soluzione del problema può essere divisa in due passi:

passo 1. assegnata la coordinata x di M, determinare la coordinata $y = f(x)$;

passo 2. calcolare (se esiste) il minimo della funzione f.

Da brave persone ordinate, partiamo dal primo passo. Indichiamo con H la proiezione ortogonale di M sull'asse x, cioè $H = (x, 0)$. Allora

$$y = -\left(\overline{HB} + \overline{BM}\right) = -\left(\overline{HB} + \ell - \overline{AB}\right) = \overline{AB} - \overline{HB} - \ell.$$

Si tratta ora di scrivere le lunghezze $\overline{AB}$ e $\overline{HB}$ in funzione di x. Basta usare il Teorema di Pitagora per ottenere:

$$\overline{HB} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{b^2 - x^2}, \qquad \overline{AB} = \sqrt{\overline{HB}^2 + \overline{HA}^2} = \sqrt{b^2 - x^2 + (a-x)^2}$$

Quindi la funzione da studiare è

$$y = f(x) = \sqrt{b^2 - x^2 + (a-x)^2} - \sqrt{b^2 - x^2} - \ell \qquad x \in [0, b].$$

L'intervallo di variazione di x si deduce direttamente dal problema considerato.

Secondo passo: qual è la scelta di x che minimizza y? Dato che la funzione è continua in $[0, b]$ e l'intervallo è chiuso e limitato, il Teorema di Weierstrass ci assicura che il problema ha soluzione, ma non ci dà nessuna informazione su quale sia il punto di minimo. Implementiamo, quindi, la strategia proposta poche pagine fa.

Prima di tutto, notiamo che la funzione f non è derivabile nei punti in cui si azzera l'argomento di una delle due radici. Dato che $b < a$, il termine $b^2 - x^2 + (a-x)^2$ è sempre non nullo. La seconda radice $\sqrt{b^2 - x^2}$ si azzera per $x = \pm b$. Di questi due punti, $-b$ va scartato perché è fuori da $[0, b]$ e b è uno degli estremi dell'intervallo.

Determiniamo l'insieme $\mathcal{S}$ dei punti stazionari di f in $(0, b)$. Dato che

$$f'(x) = -\frac{a}{\sqrt{b^2 - x^2 + (a-x)^2}} + \frac{x}{\sqrt{b^2 - x^2}}$$

i punti stazionari $x \in (0, b)$ verificano

$$\frac{a}{\sqrt{b^2 - x^2 + (a-x)^2}} = \frac{x}{\sqrt{b^2 - x^2}},$$

e, passando ai quadrati,

$$\frac{a^2}{b^2 + a^2 - 2ax} = \frac{x^2}{b^2 - x^2}.$$

Ora ci vogliono un po' di conti: l'equazione precedente è equivalente a

$$2ax^3 - 2a^2x^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2ax^2(x-a) - b^2(x+a)(x-a) = 0.$$

Dividendo per $x - a \neq 0$,

$$2ax^2 - b^2x - ab^2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = x_\pm := \frac{b^2 \pm \sqrt{b^4 + 8a^2b^2}}{4a}$$

Dato che $x_- < 0 < x_+ < b$ (verificare!), c'è un unico punto critico in $(0, b)$: $\mathcal{S} = \{x_+\}$.

Ricapitolando, la nostra strategia propone tre punti di minimo assoluto possibili: $0, x_+, b$. Per determinare chi di questi sia il punto di minimo bisognerebbe confrontare i tre valori $f(0)$, $f(x_+)$ e $f(b)$. Fattibile, ma non particolarmente semplice. Seguiamo una strada diversa. Dato che

$$f'(0) = -\frac{a}{a-b} < 0$$

il punto 0 non può essere di minimo relativo e dunque nemmeno di minimo assoluto! La lotta rimane tra x_+ e b. In b non possiamo ragionare come in 0 dato che la funzione f non è derivabile in b, quindi $f'(b)$ non ha senso. Non perdiamoci d'animo: dato che

$$\lim_{x \to b^-} f'(x) = \lim_{x \to b^-} -\frac{a}{\sqrt{b^2 - x^2 + (a-x)^2}} + \frac{x}{\sqrt{b^2 - x^2}} = +\infty$$

la funzione f è crescente in un intorno (sinistro) di b, quindi nemmeno b può essere il punto di minimo richiesto. Perfetto: resta un unico sopravvissuto x_+ che è il punto di

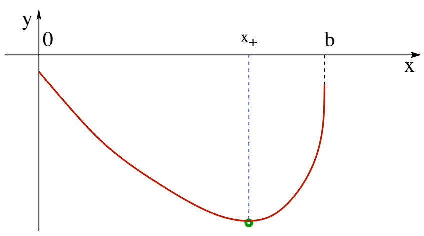

FIGURA 10. Il grafico della funzione f.

minimo cercato. Il peso M si collocherà nella posizione di coordinate $(x_+, f(x_+))$. In alternativa, per stabilire che x_+ è il punto di minimo assoluto, si sarebbe potuto anche notare che $f'' \geq 0$, quindi la funzione f è convessa e, necessariamente, il suo punto critico x_+ è di minimo assoluto.

Il principio di Fermat. Passiamo ora a considerare due problemi di *ottica geometrica* che si traducono nella ricerca del punto di minimo assoluto di certe funzioni. In quel che segue, considereremo un raggio di luce in maniera naïf: come un qualcosa che viaggia da un punto ad un altro, si riflette sugli oggetti, entra nell'occhio...

Il problema fondamentale è stabilire quale sia il tragitto percorso dal raggio per passare da un punto A ad un punto B. Il principio, proposto da Fermat, è il segunte: *il tragitto prescelto è quello che* <u>*minimizza*</u> *il tempo di percorrenza.* Se il raggio viaggia sempre nello stesso mezzo, la sua velocità v è costante, quindi minimizzare il tempo di percorrenza T equivale a minimizzare la lunghezza del percorso. Perciò il raggio percorre linee rette. Che succede in situazioni un po' più complicate?

Riflessione. Consideriamo un raggio di luce che parta dal punto $A = (0, a)$ e e che si diriga verso l'asse delle x dove immaginiamo collocato uno specchio. Il raggio viene riflesso nel punto $P = (x, 0)$ e da lì arriva nel punto $B = (b, c)$. I tragitti da A a P e da P a B sono percorsi lungo segmenti. Supponendo assegnati $a, b, c > 0$ e quindi assegnati i punti A e B, qual'è il punto P prescelto dal raggio luminoso?

Ad ogni scelta di $P = (x, 0)$, corrisponde un certo tempo di percorrenza $T = T(x)$. Il principio di Fermat afferma che il punto di riflessione $(x_0, 0)$ è tale che $T(x_0) = \min T(x)$. Bene, non resta che determinare l'espressione esplicita di $T = T(x)$ e trovare in quale punto sia assunto il minimo. Indicando con T_{AP} e T_{PB}, il tempo impiegato dal raggio per andare da A a P e da P a B rispettivamente, e con v la velocità della luce nel mezzo in considerazione,

$$T(x) = T_{AP}(x) + T_{PB}(x) = \frac{\overline{AP}}{v} + \frac{\overline{PB}}{v}.$$

Quindi, grazie al teorema di Pitagora,

$$T(x) = \frac{1}{v}\left(\sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(b - x)^2 + c^2}\right) \qquad x \in [0, b].$$

Dato che la funzione T è derivabile infinite volte, applicando la strategia per il calcolo di massimi e minimi assoluti, il punto di minimo x_0 sarà o 0, o b, o tale che $T'(x_0) = 0$. Cerchiamo quindi i punti critici di T. La derivata prima T' è esplicitamente data da

$$T'(x) = \frac{1}{v}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{b - x}{\sqrt{(b - x)^2 + c^2}}\right).$$

Essa si azzera se e solo se $x = x_* := ab/(a + c)$.

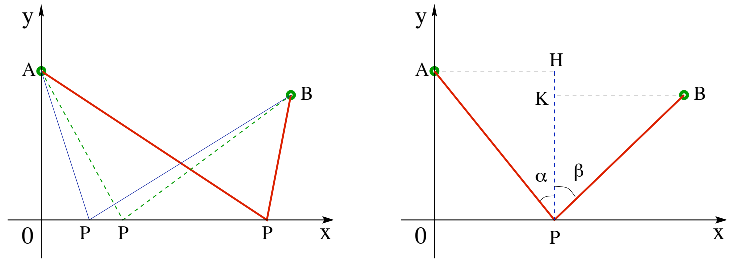

FIGURA 11. Quale sarà il punto P prescelto da un raggio riflesso in uno specchio? Quello che fa in modo che gli angoli di incidenza α e di riflessione β coincidano.

Invece di confrontare i valori di T per $x = 0, x_*, b$, si può notare che

$$T'(0) = -\frac{b}{v\sqrt{b^2+c^2}} < 0 \qquad \text{e} \qquad T'(b) = \frac{b}{v\sqrt{b^2+a^2}} > 0,$$

quindi nessuno dei due estremi dell'intervallo è di minimo. Pertanto il punto x_* è il punto di minimo assoluto.

Il punto di riflessione P è individuato da una condizione geometrica semplice. Sia α l'angolo, detto di *incidenza*, determinato dal segmento AP e dalla semiretta da P, perpendicolare all'asse x, contenuta nel semipiano $y > 0$, e sia β l'angolo, detto di *riflessione*, determinato dal segmento PB e dalla stessa semiretta di prima. Allora, indicando con H il punto di coordinate (x_*, a) e con K il punto di coordinate (x_*, c),

$$\tan\alpha = \frac{\overline{AH}}{\overline{PH}} = \frac{x_*}{a} = \frac{b}{a+c} \qquad \tan\beta = \frac{\overline{BK}}{\overline{PK}} = \frac{b - x_*}{c} = \frac{ab+bc-ab}{a+c}\,\frac{1}{c} = \frac{b}{a+c}$$

Quindi $\tan\alpha = \tan\beta$ e, dato che $\alpha, \beta \in [0, \pi/2]$, ne segue che $\alpha = \beta$. In definitiva, il principio di Fermat implica che *l'angolo di riflessione coincide con l'angolo di incidenza.*

Rifrazione. Cambiamo tipo di esperimento. Consideriamo un raggio luminoso che viaggi in due mezzi differenti in cui la sua velocità è v_+ e v_-. Per semplicità, supponiamo che il mezzo in cui la velocità è v_+ corrisponda alla regione di piano con $y > 0$ e quello in cui la velocità è v_- corrisponda a $y < 0$. Se un raggio parte da $A = (0, a)$ con $a > 0$ ed arriva a $B = (b, c)$ con $c < 0 < b$, che tragitto sceglie?

Esattamente come prima, utilizziamo il principio di Fermat. Indicando con T_{AP} e T_{PB}, il tempo impiegato dal raggio per andare da A a P e da P a B rispettivamente, il tempo impiegato per andare da A a B è

$$T(x) = T_{AP}(x) + T_{PB}(x) = \frac{\overline{AP}}{v_+} + \frac{\overline{PB}}{v_-}.$$

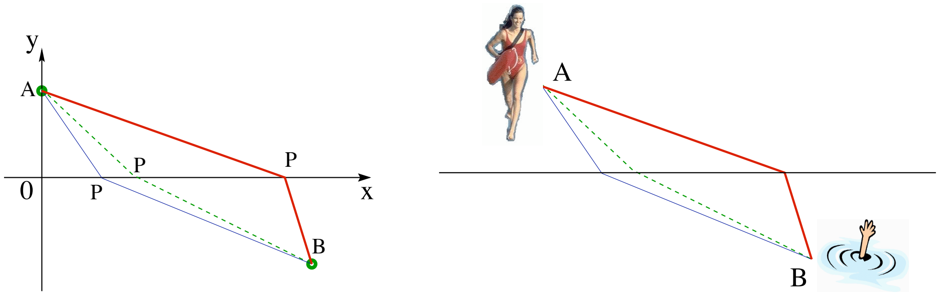

FIGURA 12. Quale percorso scegliere? Supponiamo che nel semipiano $y > 0$ ci sia la terra ferma e il mare nel semipiano $y < 0$. Nel punto A c'è la prestante bagnina di Baywatch pronta ad intervenire per salvare la vita di un affogando sito nel punto B. Sapendo che la soccorritrice quando corre sulla spiaggia va a velocità v_+ e quando nuota in mare va a velocità v_-, qual'è il percorso che le permette di soccorrere il malcapito nel minor tempo possibile?

e, di nuovo per il teorema di Pitagora,

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_+} + \frac{\sqrt{(b-x)^2 + c^2}}{v_-} \qquad x \in [0, b].$$

Anche questa funzione è derivabile infinite volte in $[0, b]$. La sua derivata prima è

$$T'(x) = \frac{x}{v_+\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{b - x}{v_-\sqrt{(b-x)^2 + c^2}}.$$

Quindi $T'(0) < 0 < T'(b)$ e anche in questo caso gli estremi non sono punti di minimo. Perciò il minimo è in $(0, b)$. Inoltre, con un po' di pazienza, si ottiene

$$T''(x) = \frac{a^2}{v_+ \left(x^2 + a^2\right)^{3/2}} + \frac{c^2}{v_- \left[(b-x)^2 + c^2\right]^{3/2}} > 0$$

Dato che la derivata seconda è (strettamente) positiva, la derivata prima T' è strettamente crescente, quindi esiste un unico x_* tale che $T'(x_*) = 0$ (si ricordi che $T'(0) < 0 < T'(b)$). Necessariamente x_* è il punto di minimo che andiamo cercando.

Come individuarlo? Per ora sappiamo solo che x_* è individuato in maniera univoca dalla relazione $T'(x_*) = 0$, cioè x_* è l'unico valore per cui

$$\frac{1}{v_+}\frac{x_*}{\sqrt{x_*^2 + a^2}} = \frac{1}{v_-}\frac{b - x_*}{\sqrt{(b - x_*)^2 + c^2}}. \tag{5}$$

Come nel caso della riflessione, ragioniamo in termini di angoli. Sia α, *angolo di incidenza*, l'angolo formato dal segmento AP con la semiretta verticale per P contenuta in $y > 0$, e sia β, *angolo di rifrazione*, l'angolo formato dal segmento PB con la semiretta verticale per P contenuta in $y < 0$. Se H e K sono le proiezioni di A e B

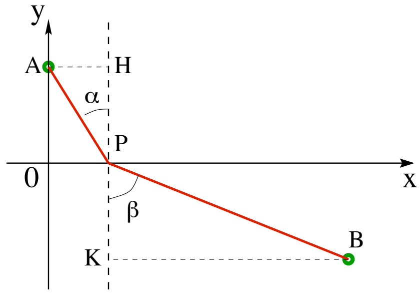

FIGURA 13. Gli angoli di incidenza e di rifrazione.

sulla retta $x = x_*$, i triangoli APH e BPK sono rettangoli e quindi

$$\sin\alpha = \frac{\overline{AH}}{\overline{AP}} = \frac{x_*}{\sqrt{x_*^2 + a^2}} \qquad \sin\beta = \frac{\overline{BK}}{\overline{BP}} = \frac{b - x_*}{\sqrt{(b - x_*)^2 + c^2}}.$$

Sostituendo nella formula (5), si deduce che il punto di rifrazione P è scelto in modo che valga

$$\frac{\sin\alpha}{v_+} = \frac{\sin\beta}{v_-}.$$

Tale relazione è nota come legge di rifrazione di Snell.

CAPITOLO 2

Ordini di grandezza e la formula di Taylor

1. Verso lo zero e ad un passo dall'infinito

Le funzioni con cui ci si trova a dover lavorare possono avere una struttura complicata, e anche molto. Se si è interessati al comportamento della funzione solo per determinati regimi, cioè per valori dell'incognita in opportune regioni, può bastare conoscere quali siano i termini dominanti all'interno della funzione. Ad esempio, se il valore $f(t)$ rappresenta la posizione di una particella all'istante t, si potrebbe essere interessati solo al comportamento della funzione f per valori grandi di t. Se $f(t) = e^t + \sin t$, è chiaro che saremo soddisfatti di un'approssimazione del tipo $f(t) \approx e^t$ per $t \to +\infty$, dato che questo termine diverge a $+\infty$, mentre l'altro rimane limitato. Ma se invece $f(t) = e^t + t$? Anche qui l'approssimazione sensata, per $t \to +\infty$, è $f(t) \approx e^t$, dato che l'esponenziale cresce più rapidamente del termine di primo grado t. Come formalizzare in modo preciso la frase "cresce ben più rapidamente"?

Lo stesso tipo di problema sorge nel caso di quantità infinitesime. Come confrontare termini che diventano molto piccoli (tendenti a zero)?

Ordine di infinito per $x \to +\infty$. Consideriamo qui funzioni f tali che

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = +\infty$$

(il caso $x \to -\infty$ è analogo). Come distinguere tra funzioni di questo genere quelle che divergono "più rapidamente" e quelle che divergono "meno rapidamente"? Ad esempio le funzioni x^α, $\ln x, e^x, a^x$ (con $\alpha > 0$ e $a > 1$) divergono per $x \to +\infty$ in modi essenzialmente differenti. Quale di queste funzioni cresce più rapidamente delle altre?

Dato che

x	1	10	100	1000
x^2	1	100	10000	1000000
x^3	1	1000	1000000000	1000000000000

ci aspettiamo che x^3 tenda all'infinito più rapidamente di x^2. La maniera rigorosa per esprimere questo concetto è studiare il rapporto delle due quantità. Dato che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = +\infty,$$

la grandezza di x^3 relativamente a quella di x^2 è maggiore. Questa proprietà si esprime dicendo che x^3 *tende a* $+\infty$ *più rapidamente di* x^2 *per* $x \to +\infty$.

Allo stesso modo, x^α cresce più rapidamente di x^β per $\alpha > \beta$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = +\infty \qquad \forall\, \alpha > \beta.$$

Definizione 1.1. Ordine di infinito I. *Siano f e g tali che*

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = \lim_{x\to+\infty} |g(x)| = +\infty. \tag{6}$$

Si dice che: f ha ordine di infinito superiore rispetto a g per $x \to +\infty$ *se*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = +\infty.$$

Analogamente, f ha ordine di infinito inferiore rispetto a g per $x \to +\infty$ *se*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0.$$

Può capitare che due funzioni abbiano lo stesso tipo di andamento all'infinito. Ad esempio: x e $2x$ sono entrambi polinomi di grado 1 e vale:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Il fatto che il limite del rapporto sia una costante non zero, suggerisce che le due funzioni hanno lo stesso ordine di grandezza. Si sarebbe tentati di dire che due funzioni hanno lo stesso ordine di grandezza se e solo se

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \ell > 0.$$

Questa definizione, seppure ragionevole, è troppo restrittiva: non è in grado di coprire casi con termini oscillanti. Un esempio: per $f(x) = x(1+\sin^2 x)$ e $g(x) = x$, si ha

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \frac{|x||1+\sin^2 x|}{|x|} = 1 + \sin^2 x \in [1,2],$$

che non ammette limite per $x \to +\infty$. Ma, dato che $x \le f(x) \le 2x$, è ragionevole affermare che f tende all'infinito con la stessa velocità di x.

Definizione 1.2. Ordine di infinito II. *Si dice che le funzioni f e g, soddisfacenti* (6)*, hanno* lo stesso ordine di infinito per $x \to +\infty$ *se esistono $C_1, C_2 > 0$ tali che*

$$0 < C_1 \le \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \le C_2 \qquad \text{per } x \text{ sufficientemente grande.} \tag{7}$$

In generale, per verificare la condizione (7) occorre stimare il rapporto $|f|/|g|$ e non sempre questa operazione è facile. Però, se esiste ed è diverso da zero il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \ell \neq 0,$$

la condizione (7) è automaticamente soddisfatta. Ad esempio, consideriamo le funzioni $f(x) = 2x^2 - 1$ e $g(x) = x^2 + x + 3$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + x + 3} = 2 \neq 0,$$

quindi hanno lo stesso ordine di infinito. In generale, se f è un polinomio di grado m e g un polinomio di grado p, allora: se $m > p$, f è di ordine superiore a g; se $m = p$, f e g sono dello stesso ordine; se $m < p$, f è di ordine inferiore a g.

Osservazione 1.3. Se f è di ordine superiore rispetto a g, allora la funzione somma $f + g$ ha lo stesso ordine di f, infatti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) + g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{g(x)}{f(x)}\right) = 1.$$

Ad esempio, la funzione $x + \ln x$ ha lo stesso ordine di infinito di x per $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x + \ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) = 1.$$

Definizione 1.4. *Se per una funzione f esiste un valore $\alpha > 0$ tale che f è dello stesso ordine di infinito di $|x|^\alpha$ per $x \to +\infty$ si dice che f è un* infinito di ordine α. *La funzione $|x|$ è detta* infinito campione per $x \to +\infty$.

Ad esempio, la funzione $\sqrt{1 + x^2}$ è tale che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} = 1,$$

quindi ha ordine di infinito uguale ad 1 per $x \to +\infty$. La funzione $\dfrac{4x^3 + 1}{x - 5}$ è tale che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(4x^3 + 1)/(x - 5)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3 + 1}{x^3 - 5x^2} = 4$$

quindi ha ordine di infinito 2. In generale, l'ordine di infinito di una funzione razionale con numeratore di grado m e denominatore di grado p (con $m > p$) è $m - p$ (dimostratelo!).

Osservazione 1.5. Se una funzione f ha ordine di infinito α, allora

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{\alpha+\varepsilon}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} \frac{1}{x^\varepsilon} = 0 \qquad \forall \varepsilon > 0;$$

cioè ha ordine di infinito inferiore rispetto ad $x^{\alpha+\varepsilon}$ per ogni $\varepsilon > 0$. Analogamente

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{\alpha-\varepsilon}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{\alpha}}\, x^{\varepsilon} = \infty \qquad \forall\, \varepsilon > 0,$$

quindi ha ordine di infinito superiore rispetto ad $x^{\alpha-\varepsilon}$ per ogni $\varepsilon > 0$.

Si potrebbe pensare di introdurre una "scala assoluta" di ordine di grandezza delle funzioni, attribuendo a ciascuna funzione divergente la corrispondente potenza che la rappresenta. Questa scala, però, non adempie il compito richiesto: ci sono funzioni la cui "velocità di divergenza" non corrisponde a quella di nessuna potenza e quindi che, in questo senso, non possono essere classificate. I due casi più rilevanti sono dati dalla funzione $\ln x$ e da e^x per cui vale

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^{\alpha}} = +\infty \qquad \forall\, \alpha > 0. \tag{8}$$

Per dimostrare (8), osserviamo preliminarmente che vale la disequazione[1]

$$\ln t \le t \qquad \forall\, t > 0. \tag{9}$$

Ora, dato $\alpha > 0$, scegliamo $\varepsilon \in (0, \alpha)$. Applicando la disequazione (9) per $t = x^{\alpha-\varepsilon}$ e usando le proprietà del logaritmo:

$$\ln x \le \frac{1}{\alpha - \varepsilon}\, x^{\alpha-\varepsilon} \qquad \forall\, x > 0,\ 0 < \varepsilon < \alpha.$$

Dividendo entrambi i membri per x^{α} e passando al limite,

$$0 \le \frac{\ln x}{x^{\alpha}} \le \frac{1}{(\alpha-\varepsilon)x^{\varepsilon}} \qquad \forall\, x > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0.$$

Per il secondo limite in (8), ponendo $y = e^x$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^{\alpha}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{(\ln y)^{\alpha}} = \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{y^{1/\alpha}}{\ln y}\right)^{\alpha} = +\infty.$$

Le formule in (8) affermano che $\ln x$ diverge per $x \to +\infty$ più lentamente di qualsiasi potenza x^{α} e che e^x diverge più rapidamente di qualsiasi potenza x^{α}.

Osservazione 1.6. Con le funzioni esponenziali e con i logaritmi, è possibile costruire funzioni che divergono a velocità sempre più grandi o a velocità sempre più piccole. Ad esempio,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln y}{y} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{(e^x)}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty,$$

e quindi $\ln(\ln x)$ è un infinito di ordine inferiore a $\ln x$ e $e^{(e^x)}$ è di ordine superiore a e^x.

[1] Infatti, detta $F(t) = t - \ln t$, allora $F'(t) = 1 - 1/t$ e quindi F ha un punto di minimo assoluto per $t = 1$. Perciò $F(t) \ge F(1) = 1 > 0$.

Osservazione 1.7. Cosa succede per a^x e $\log_a x$ con $a > 1$ (e diverso da e)? La funzione $\log_a x$ si può scrivere in termini della funzione $\ln x$:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

(sapete giustificare questa formula?). Quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha \ln a} = 0 \qquad \forall\, \alpha > 0.$$

Procedendo come nel passaggio dal limite riguardante il logaritmo naturale al limite per l'esponenziale con base e, deduciamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad \forall\, \alpha > 0,\ a > 1.$$

E' interessante confrontare tra loro esponenziali e logaritmi con basi diverse:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{\log_b x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln a}\,\frac{\ln b}{\ln x} = \frac{\ln b}{\ln a} \qquad \forall a, b > 1,$$

quindi logaritmi con basi diverse hanno lo stesso ordine di infinito. Per gli esponenziali, invece, dati $a, b > 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{b^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^x = \begin{cases} 0 & a < b, \\ 1 & a = b, \\ +\infty & b < a, \end{cases}$$

che mostra che esponenziali con base maggiore hanno ordine di infinito maggiore.

Ordine di infinito e comportamento asintotico. È possibile che per una funzione f valga una decomposizione del tipo

$$f(x) = g(x) + h(x) \qquad \text{con } \lim_{x\to+\infty} h(x) = 0, \tag{10}$$

dove la funzione g è una funzione "nota" (ad esempio, una funzione con un asintoto obliquo). Se la funzione $|g|$ diverge a $+\infty$ per $x \to +\infty$, allora

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = \lim_{x\to+\infty} |g(x) + h(x)| = +\infty.$$

Come sono collegati gli ordini di infinito di f e g? La risposta è semplice: *le funzioni f e g hanno lo stesso ordine di infinito*, infatti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x) + h(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{h(x)}{g(x)}\right) = 1. \tag{11}$$

Ad esempio, tutte le funzioni che possiedono un asintoto obliquo (non orizzontale) per $x \to +\infty$ hanno ordine di infinito 1.

E' vero il viceversa? Supponiamo di sapere che una funzione f abbia lo stesso ordine di infinito di una funzione g:

$$\lim_{x\to+\infty}|f(x)| = \lim_{x\to+\infty}|g(x)| = +\infty \quad \text{e} \quad 0 < C_1 \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq C_2.$$

E' vero che vale una rappresentazione come quella data in (10)? La risposta, in generale, è negativa. Ad esempio, per le funzioni $f(x) = x + \ln x$ e $g(x) = x$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{\ln x}{x} = 1,$$

ma la differenza tra f e g se ne guarda bene dal tendere a zero per $x \to +\infty$

$$h(x) = f(x) - g(x) = (x - \ln x) - x = \ln x \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty.$$

Ordine di infinito per $x \to x_0$. Così come si confrontano i comportamenti delle funzioni per $x \to +\infty$, è possibile confrontare funzioni che divergono in un punto x_0. La terminologia è analoga alla precedente.

Definizione 1.8. Ordine di infinito III. *Date due funzioni f e g tali che*

$$\lim_{x\to x_0}|f(x)| = \lim_{x\to x_0}|g(x)| = +\infty,$$

si dice che f è un infinito di ordine superiore rispetto a g per $x \to x_0$ *se*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|}{|g(x)|} = +\infty.$$

Se il limite è 0, f è un infinito di ordine inferiore rispetto a g per $x \to x_0$. *Infine, se esistono C_1, C_2 e $\delta > 0$ per cui*

$$0 < C_1 \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq C_2 \qquad \text{per} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \tag{12}$$

si dice che f e g hanno stesso ordine di infinito per $x \to x_0$.

Come nel caso di $x \to +\infty$, se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)/g(x) = \ell \neq 0$, allora è automaticamente verificata la condizione (12) e, quindi, f e g sono dello stesso ordine. Ad esempio

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{x}\right| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{\sin x}\right| = +\infty \quad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{1/\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,$$

quindi $f(x) = 1/x$ e $g(x) = 1/\sin x$ sono "infiniti" dello stesso ordine per $x \to 0$.

Definizione 1.9. *Se la funzione f ha lo stesso ordine di infinito di $1/|x - x_0|^\alpha$ per qualche $\alpha > 0$, si dice che f è un* infinito di ordine α per $x \to x_0$. *La funzione $1/|x - x_0|$ è detta* infinito campione per $x \to x_0$.

Anche qui si può ripetere quanto detto in precedenza: esistono funzioni che non hanno un ordine di infinito per $x \to x_0$. Un esempio? Con il cambio di variabile $y = -\ln x$, si deduce che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x^\alpha} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{e^{\alpha y}} = 0,$$

che mostra che $\ln x$ ha un ordine di infinito in 0 inferiore a qualsiasi potenza.

Ordine di infinitesimo. Così come si confrontano infiniti, è possibile confrontare funzioni infinitesime per $x \to x_0$ con $x_0 \in \mathbb{R}$ oppure per $x \to \pm\infty$. Qui, per abbreviare l'esposizione, scriviamo x_0 per indicare o un numero reale, o uno dei due simboli $\pm\infty$.

DEFINIZIONE 1.10. *Ordine di infinitesimo. Siano f e g infinitesime per $x \to x_0$. Si dice che f è un* infinitesimo di ordine superiore a g per $x \to x_0$ *se*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0. \tag{13}$$

Se il limite è $+\infty$, f è un infinitesimo di ordine inferiore a g. *Infine, f e g hanno lo* stesso ordine di infinitesimo *se in un intorno di x_0 (nel caso di $x_0 = \pm\infty$ si intende per valori sufficientemente grandi),*

$$0 < C_1 \leq \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq C_2 \qquad \textit{per qualche } C_1, C_2 > 0.$$

Come nel caso degli infiniti, si introducono infinitesimi campione.

– Se $x_0 \in \mathbb{R}$, si dice che f è un infinitesimo di ordine α, se è dello stesso ordine di $|x - x_0|^\alpha$. La funzione $|x - x_0|$ è l'infinitesimo campione per $x \to x_0$.
– Se $x_0 = \pm\infty$, si dice che f è un infinitesimo di ordine α, se è dello stesso ordine di $1/|x|^\alpha$. La funzione $1/|x|$ è l'infinitesimo campione per $x \to \pm\infty$.

Qualche esempio (tanto per gradire):

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sin x \text{ è infinitesimo di ordine 1 per } x \to 0$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1/(1+x^2)}{1/x^2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{1+x^2} \text{ è infinitesimo di ordine 2 per } x \to \pm\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad 1 - \cos x \text{ è infinitesimo di ordine 2 per } x \to 0$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\arctan(1/x)}{1/x} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \text{ è infinitesimo di ordine 1 per } x \to \pm\infty$$

I simboli di Landau: "O" e "o". Per indicare che una funzione f ha un ordine di grandezza inferiore a quello di un'altra funzione g si usa la notazione $f = o(g)$ per $x \to x_0$ (si legge *f è un "o piccolo" di g*). Il significato di questa affermazione è che f/g tende a zero per $x \to x_0$. Ad esempio,

$$x^\alpha = o(x^\beta) \qquad \forall\, \alpha < \beta \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Abbiamo anche visto che

$$\begin{aligned} &\ln x = o(x^\alpha) && \forall\, \alpha > 0 && \text{per } x \to +\infty, \\ &x^\alpha = o(e^x) && \forall\, \alpha > 0 && \text{per } x \to +\infty, \\ &1 - \cos x = o(x) && && \text{per } x \to 0. \end{aligned}$$

Esercizio 1.11. *Verificare la validità di*

$$\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} = \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \textit{per } x \to +\infty.$$

Analogamente si introduce la notazione $f = O(g)$ (si legge *f è un "O grande" di g*) per indicare che la funzione f ha al più l'ordine di grandezza di g, ossia se il rapporto f/g è limitato in un intorno di x_0

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \le C,$$

per qualche $C > 0$, in un intorno di x_0. Ad esempio,

$$\sqrt{10x-1} = O(\sqrt{x}) \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Infatti, dato che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{10x-1}}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{10 - \frac{1}{x}} = \sqrt{10},$$

il rapporto di $\frac{\sqrt{10x-1}}{\sqrt{x}}$ è limitato per valori della x sufficientemente grandi.

Dai limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

segue che, per $x \to 0$,

$$e^x = 1 + O(x), \quad \ln(1+x) = O(x), \quad \sin x = O(x), \quad \cos x = 1 + O(x^2).$$

Derivabilità con i simboli di Landau. Tramite i simboli di Landau si può riscrivere la derivabilità di una funzione in modo diverso. La derivabilità di una funzione f in x può essere scritta nella forma

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h} = 0.$$

Quindi, se una funzione è derivabile in x, vale la relazione (particolarmente significativa)

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(h) \qquad \text{per } x \to 0. \tag{14}$$

L'interpretazione di questa formula è che l'incremento di f si può rappresentare come un termine $f'(x)h$, lineare nell'incremento h, più un resto che ha un ordine di grandezza inferiore ad h per $h \to 0$. Si usa la terminologia:

$$\textsf{differenziale di } f\text{:} \qquad df(x;h) := f'(x)h.$$

Fissato il valore di x, il differenziale $df(x;h)$ rappresenta un'approssimazione (valida a meno di $o(h)$) dell'incremento $\Delta f(x;h) := f(x+h) - f(x)$:

$$\Delta f(x;h) \approx df(x;h) \qquad \text{per } h \to 0.$$

Come si precisa il senso del simbolo $\approx$? Proprio tramite i simboli di Landau:

$$|\Delta f(x;h) - df(x;h)| = o(h) \qquad \text{per } h \to 0,$$

che esprime il fatto che l'errore che si commette sostituendo all'incremento Δf, il differenziale df è un infinitesimo di ordine superiore al primo.

2. Il Teorema di de l'Hôpital

Supponiamo f e g continue nell'intervallo (a,b) e sia $x_0 \in (a,b)$ tale che

$$f(x_0) = g(x_0) = 0.$$

In questa situazione non è evidente se esista e quanto valga il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Sostituendo, formalmente, a f e g il valore nel punto limite si ottiene l'espressione $\frac{0}{0}$ che non ha senso. L'esistenza o meno del limite è legata alla rapidità con cui le funzioni f e g tendono a 0 per $x \to x_0$, ossia alla relazione che c'è tra i loro ordini di infinitesimo. Come risolvere un limite del genere? Se le funzioni f e g sono derivabili in x_0, si può pensare di approssimare le funzioni f e g con la loro retta tangente nel punto x_0:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}{g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0)} = \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{g'(x_0)(x-x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Come rendere rigorosa tale affermazione? Utilizzando (14), si ha

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)}{g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)} = \frac{f'(x_0) + \frac{o(x-x_0)}{x-x_0}}{g'(x_0) + \frac{o(x-x_0)}{x-x_0}} \tag{15}$$

avendo utilizzato la proprietà $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Passando al limite per $x \to x_0$, nel caso in cui $g'(x_0) \neq 0$, si ottiene

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \qquad (g'(x_0) \neq 0).$$

Questa formula è nota come regola di de l'Hôpital[2]. Lavorando in maniera più raffinata, si dimostra una variante della precedente formula di de l'Hôpital, che non richiede la derivabilità delle funzioni f e g nel punto limite, ma solo l'esistenza del limite del rapporto delle derivate. Anche tale variante è nota sotto lo stesso nome.

Teorema 2.1. *Regola di de l'Hôpital.* *Siano f e g due funzioni derivabili tali che $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Se esiste finito*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R},$$

allora esiste anche il limite $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)/g(x)$ ed ha lo stesso valore ℓ.

La conclusione è valida anche nel caso in cui il rapporto delle derivate abbia limite $+\infty$ o $-\infty$. Non si può dedurre nessuna conclusione nel caso in cui il rapporto delle derivate non abbia limite.

Esistono in commercio anche altre versioni del Teorema di de l'Hôpital che si applicano a casi differenti: forme indeterminate del tipo $0/0$ per $x \to \pm\infty$ o del tipo ∞/∞ per $x \to x_0$ e per $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} g(x) = 0, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \lim_{x \to x_0} |g(x)| = \infty, \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} |f(x)| = \lim_{x \to \pm\infty} |g(x)| = \infty, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Il simbolo ℓ può essere sia un numero reale sia $+\infty$ o $-\infty$.

Il principio è sempre lo stesso: nel caso di una forma indeterminata $0/0$ o ∞/∞, si può calcolare il limite del rapporto delle derivate. Se tale limite esiste, allora dà anche il valore del limite iniziale. Se, invece, il rapporto delle derivate non esiste, non si può

[2]Questa regola porta il nome il nome del matematico francese Guillaume Francois Antoine, marchese de L'Hôpital (1661 – 1704), che pubblicò la formula nel suo libro *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1692). La regolar è in realtà dovuta a Jean Bernoulli, a cui L'Hôpital pagava una pensione di 300 franchi annui in cambio delle informazioni relative ai suoi progressi nel calcolo infinitesimale e della risoluzione di alcuni problemi posti dal de L'Hôpital (tra cui quello di determinare il limite di forme indeterminate). L'Hôpital, riconoscendo che parte del contenuto del suo trattato era dovuta a Bernoulli, preferì pubblicarlo in forma anonima. Ciò nonostante, una volta scoperto l'autore del libro, la formula fu associata al suo nome.

concludere nulla. Nel caso in cui il limite del rapporto delle derivate dia luogo, esso stesso, ad una forma indeterminata $0/0$ o ∞/∞, si può applicare di nuovo il Teorema di de l'Hôpital e (provare a) calcolare il limite del rapporto delle derivate seconde.

Esempio 2.2. Per calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \arctan x}{x - \sin x}, \tag{16}$$

studiamo il limite del rapporto delle derivate

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{(1+x^2)(1-\cos x)} = 2,$$

dato che $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)/x^2 = 1/2$. Quindi il limite (16) esiste e vale 2.

Esempio 2.3. Calcoliamo

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) x.$$

Questo limite è della forma $0 \cdot \infty$, ma si può ricondurre alla tipologia trattabile con il teorema di de l'Hôpital riscrivendolo come

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\pi/2 - \arctan x}{1/x}.$$

Il rapporto delle derivate ha limite:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{-1/(1+x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1.$$

Quindi, il limite richiesto esiste e vale 1.

Esercizio 2.4. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{\cos x - 1}.$$

La dimostrazione del Teorema di de L'Hôpital. Per cominciare, enunciamo (e dimostriamo) una variante del Teorema di Lagrange, nota come Teorema di Cauchy.

Teorema 2.5. <u>*Teorema di Cauchy.*</u> *Siano f e g due funzioni continue in $[a,b]$ e derivabili in (a,b). Allora esiste $\xi \in (a,b)$ tale che*

$$\det \begin{pmatrix} f(b) - f(a) & f'(\xi) \\ g(b) - g(a) & g'(\xi) \end{pmatrix} = 0, \tag{17}$$

cioè $(f(b) - f(a))g'(\xi) = f'(\xi)(g(b) - g(a))$.

Interpretazione geometrica. Date le funzioni f e g, consideriamo la funzione *vettoriale* (f, g) che associa ad un punto dell'intervallo $[a, b]$ il punto del piano di coordinate (f, g). Il Teorema di Cauchy asserisce che esiste sempre un valore $\xi \in (a, b)$ tale che il vettore incremento $(f(b) - f(a), g(b) - g(a))$ e il vettore "derivata" $(f'(x), g'(x))$ calcolato in $x = \xi$ sono paralleli.

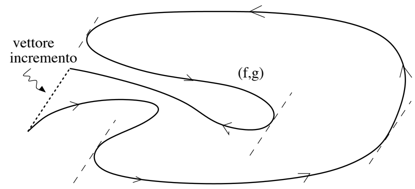

FIGURA 1. L'interpretazione geometrica del Teorema di Cauchy.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2.5. Consideriamo la funzione

$$\begin{aligned}\Phi(x) &:= \det\begin{pmatrix} f(b)-f(a) & f(x)-f(a) \\ g(b)-g(a) & g(x)-g(a)\end{pmatrix} \\ &= \big[f(b)-f(a)\big]\,[g(x)-g(a)] - [f(x)-f(a)]\big[g(b)-g(a)\big].\end{aligned}$$

La funzione Φ è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Inoltre, si hanno

$$\Phi(a) = \det\begin{pmatrix} f(b)-f(a) & 0 \\ g(b)-g(a) & 0\end{pmatrix} = 0.$$

$$\Phi(b) = \det\begin{pmatrix} f(b)-f(a) & f(b)-f(a) \\ g(b)-g(a) & g(b)-g(a)\end{pmatrix} = 0$$

Quindi, per il Teorema di Rolle, esiste $\xi \in (a, b)$ tale che $\Phi'(\xi) = 0$. Dall'espressione

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= (f(b)-f(a))g'(x) - f'(x)(g(b)-g(a)) \\ &= \det\begin{pmatrix} f(b)-f(a) & f'(x) \\ g(b)-g(a) & g'(x)\end{pmatrix} = 0,\end{aligned}$$

segue la conclusione. $\square$

Armati del precedente risultato, si può dimostrare il Teorema di de l'Hôpital.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2.1. Scegliamo, nella formula (17), $a = x_0$ e $b = x$. Dato che, per ipotesi, $f(x_0) = g(x_0) = 0$, si ha

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \tag{18}$$

dove ξ è compreso tra x_0 e x. Per $x \to x_0$, necessariamente $\xi \to x_0$, e il termine $f'(\xi)/g'(\xi)$ tende ad ℓ per ipotesi. Dato che questo termine è uguale a $f(x)/g(x)$, ne segue la conclusione $\square$

Approssimazioni polinomiali. Utilizziamo adesso il Teorema di de l'Hôpital per dedurre delle approssimazioni polinomiali di funzioni con un errore che sia infinitesimo di ordine sempre più alto. Scegliamo come cavia la funzione $\sin x$. Dato che è derivabile in 0 e la sua derivata è 1,

$$\sin x = x + o(x) \qquad \text{per } x \to 0 \tag{19}$$

o, equivalentemente,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0.$$

Per dedurre un'approssimazione per $\sin x$ con un errore che sia $o(x^2)$, calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2}.$$

Per applicare il Teorema di de l'Hôpital, studiamo il limite del rapporto delle derivate

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{2x} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0.$$

Dato che tale limite esiste finito, anche il limite di partenza esiste e vale 0. Quindi

$$\sin x = x + o(x^2) \qquad \text{per } x \to 0 \tag{20}$$

La formula (20) dice che l'errore che si commette approssimando $\sin x$ con x è un infinitesimo di ordine superiore al secondo per $x \to 0$. Questa informazione è migliore di quella data da (19), che ci garantiva solamente un errore di ordine superiore al primo.

Per ottenere un approsimazione con errore di ordine superiore al terzo, ragioniamo come in precedenza e calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = -\frac{1}{6},$$

che implica $\sin x = x + O(x^3)$. Portando il termine $-1/6$ a primo membro, otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^3} = 0$$

cioè la funzione $\sin x$ è pari a $x - \frac{1}{6}x^3$ più un errore superiore a x^3

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \qquad \text{per } x \to 0. \tag{21}$$

Possiamo iterare il procedimento e calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x + x}{12x^2} = 0,$$

quindi

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \qquad \text{per } x \to 0. \tag{22}$$

Ripetiamo l'esperimento su una cavia diversa: e^x. Il fatto che e^x sia derivabile in $x = 0$ e la derivata valga 1 si traduce nella formula

$$e^x = 1 + x + o(x) \qquad \text{per } x \to 0. \tag{23}$$

Per migliorare l'espressione, calcoliamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2},$$

cioè $e^x = 1 + x + O(x^2)$. Il limite può essere riscritto come

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} - \frac{1}{2} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^2} = 0,$$

cioè $e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2 = o(x^2)$, o anche

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

Allo stesso modo

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{3x^2} = \frac{1}{6}, \tag{24}$$

La relazione (24) si può riscrivere come

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\left(e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3\right) = 0 \iff e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

Cosa stiamo facendo iterando questo procedimento? Stiamo ottenendo delle approssimazioni ad ordini sempre più alti di una funzione data. La relazione $e^x = 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ esprime il fatto che la funzione e^x si può approssimare, per $x \to 0$ con il polinomio $1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$ commettendo un errore (la differenza tra e^x e il polinomio) che tende a zero per $x \to 0$ con ordine superiore a 3 (cioè più rapidamente di x^3).

L'iterazione dell'algoritmo che abbiamo visto conduce direttamente a quello che si chiama *polinomio di Taylor*.

3. La formula di Taylor

Replichiamo, in generale, l'esperimento fatto su $\sin x$ e e^x alla fine del paragrafo precedente. Se f è una funzione derivabile in x_0, si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]}{x - x_0} = 0,$$

o, equivalentemente,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|) \qquad \text{per} \quad x \to x_0,$$

che esprime che la funzione f, vicino ad x_0, si approssima con la funzione $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, con un errore che è un infinitesimo di ordine superiore ad 1.

Per ottenere un'approssimazione più precisa, supponendo che la funzione f si derivabile due volte, possiamo calcolare il limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)]}{(x-x_0)^2} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x-x_0)} = \frac{1}{2}f''(x_0),$$

avendo applicato il Teorema di de l'Hôpital. Il precedente limite si può scrivere come

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2\right]}{(x-x_0)^2} = 0$$

ossia

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + o(|x-x_0|^2).$$

Così abbiamo scoperto che la funzione $f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2$ approssima f, vicino ad x_0, con un errore di ordine superiore a 2. Il grafico della funzione $p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2$ rappresenta la parabola che meglio approssima la funzione f per $x \to x_0$.

Iterando ancora una volta il procedimento e supponendo che la funzione f sia derivabile tre volte in x_0, si ottiene

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x-x_0)^3 + o(|x-x_0|^3).$$

E in generale?

TEOREMA 3.1. Formula di Taylor. *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in (a,b) e sia $x_0 \in (a,b)$. Dato $n \in \mathbb{N}$, posto*

$$T_n(x;x_0) := f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n,$$

si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - T_n(x;x_0)}{(x-x_0)^n} = 0,$$

cioè vale la decomposizione $f(x) = T_n(x;x_0) + o(|x-x_0|^n)$.

DEFINIZIONE 3.2. *Il polinomio $T_n(x;x_0)$ si chiama* polinomio di Taylor[3] di grado n della funzione f nel punto x_0 *e rappresenta un'approssimazione di f vicino ad x_0.*

La peculiarità della formula di Taylor sta nel fatto che il resto R_n, definito da

$$R_n(x;x_0) := f(x) - T_n(x;x_0),$$

è un infinitesimo di ordine superiore ad $|x-x_0|^n$ per $x \to x_0$.

[3] Se $x_0 = 0$, il polinomio p_n viene, a volte, chiamato polinomio di McLaurin.

Dimostrazione. Applichiamo il Teorema di de l'Hôpital al limite

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-\cdots-\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}}{(x-x_0)^n}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)-f''(x_0)(x-x_0)-\cdots-\frac{1}{(n-2)!}f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-2}}{n(x-x_0)^{n-1}}.$$

Dato che sia il numeratore che il denominatore sono infinitesimi, possiamo applicare nuovamente il Teorema di de l'Hôpital, ottenendo

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)-f'''(x_0)(x-x_0)\cdots-\frac{1}{(n-3)!}f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-3}}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}.$$

Iterando $n-1$ volte il procedimento si ottiene

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{n!(x-x_0)}=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0).$$

Quindi vale

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-\cdots-\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}}{(x-x_0)^n}=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0),$$

da cui segue

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-\cdots-\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}}{(x-x_0)^n}-\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)=0,$$

che porta alla conclusione. □

Esempio 3.3. Polinomi. Assegnati $a_0,\dots,a_p$, sia

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_px^p.$$

Consideriamo, prima di tutto, lo sviluppo in $x_0=0$. Dato che

$$\begin{aligned}
f'(x)&=a_1+2a_2\,x+\cdots+pa_px^{p-1}\\
f''(x)&=2a_2+3\cdot 2a_3\,x+\cdots+p(p-1)a_px^{p-2}\\
&\ \ \vdots\\
f^{(p)}(x)&=p(p-1)\cdots 2\cdot 1\,a_p\\
f^{(k)}(x)&=0 \qquad\qquad\qquad k>p
\end{aligned}$$

si ha

$$f'(0)=a_1,\quad f''(0)=2a_2,\quad \dots\quad f^{(p)}(0)=p!\,a_p,\quad f^{(k)}(0)=0\qquad k>p.$$

Quindi,

$$T_n(x;0)=\begin{cases} a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n & n<p,\\ a_0+a_1x+\cdots+a_px^p & n\ge p.\end{cases}$$

Come era naturale aspettarsi, il polinomio di Taylor di f in $x_0 = 0$ e di grado n si ottiene considerando i termini del polinomio con grado minore o uguale ad n.

Per il polinomio di Taylor in $x_0 \neq 0$, occorre riscrivere il polinomio in termini di potenze di $h := x - x_0$. In questo modo si otterrà un'espressione del tipo

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots + b_p(x - x_0)^p$$

con $b_0, b_1, \ldots, b_p$ opportuni. Il polinomio di Taylor è dato da

$$T_n(x; x_0) = \begin{cases} b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots + b_n(x - x_0)^n & n < p, \\ b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots + b_p(x - x_0)^p & n \geq p. \end{cases}$$

Consideriamo, ad esempio, la funzione $f(x) = x + x^3$. Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, per scriverla in termini di potenze di $h = x - x_0$ calcoliamo

$$f(x_0 + h) = (x_0 + h) + (x_0 + h)^3 = x_0 + x_0^3 + (1 + 3x_0^2)h + 3x_0h^2 + h^3.$$

Quindi vale l'identità

$$x + x^3 = x_0 + x_0^3 + (1 + 3x_0^2)(x - x_0) + 3x_0(x - x_0)^2 + (x - x_0)^3.$$

Ad esempio, il polinomio di Taylor di grado 2 in x_0 è

$$T_2(x; x_0) = x_0 + x_0^3 + (1 + 3x_0^2)(x - x_0) + 3x_0(x - x_0)^2.$$

Lo stesso, evidentemente, si ottiene applicando direttamente la formula: da

$$f(x) = x + x^3, \qquad f'(x) = 1 + 3x^2, \qquad f''(x) = 6x,$$

segue

$$T_2(x; x_0) = x_0 + x_0^3 + (1 + 3x_0^2)(x - x_0) + 3x_0(x - x_0)^2.$$

Esempio 3.4. *Esponenziale in $x_0 = 0$.* Siano

$$f(x) = e^x \qquad \text{e} \qquad x_0 = 0.$$

Dato che $f^{(k)}(x) = e^x$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ha $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$ per ogni k, quindi il polinomio di Taylor di grado n è

$$T_n(x; 0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Questa formula è coerente con la definizione di esponenziale data in precedenza.

Che succede se $x_0 \neq 0$? I conti non sono molto diversi:

$$T_n(x; 0) = e^{x_0} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} = e^{x_0} \left[1 + (x - x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}\right].$$

Esempio 3.5. Seno e coseno in $x_0 = 0$. Sia $f(x) = \sin x$, allora

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x, \qquad f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x \qquad \forall\, k = 0, 1, 2, \dots .$$

Calcolando in $x_0 = 0$, otteniamo

$$f^{(2k)}(0) = 0, \qquad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \qquad \forall\, k = 0, 1, 2, \dots .$$

Ne segue che

$$T_n(x; 0) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

è il polinomio di Taylor di grado n con $n = 2k+1$ o $2k+2$. In effetti si può dimostrare che vale l'uguaglianza

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Analogamente se consideriamo la funzione $f(x) = \cos x$ abbiamo

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos x, \qquad f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \sin x \qquad \forall\, k = 0, 1, 2, \dots .$$

Calcolando in $x_0 = 0$, otteniamo

$$f^{(2k)}(0) = (-1)^k, \qquad f^{(2k+1)}(0) = 0 \qquad \forall\, k.$$

Ne segue che

$$T_n(x; 0) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

è il polinomio di Taylor di $\cos x$ centrato in 0 di grado n con $n = 2k$ o $2k+1$. Anche per il coseno vale un'uguaglianza analoga alla precedente:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 3.6. *Calcolare il polinomio di Taylor di grado* 4 *della funzione* $\sin x$ *centrato in* $x_0 = \pi/2$ *e quello centrato in* $x_0 = \pi/4$.

Esempio 3.7. Siano $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ e $x_0 = 0$. Le derivate di f sono

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \qquad \dots, \qquad f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

Perciò $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$,... $f^{(k)}(0) = k!$. Quindi il polinomio di Taylor è

$$T_n(x; 0) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

coerente con l'espressione nota per la serie geometrica.

Esempio 3.8. Come ultimo esempio, consideriamo

$$f(x) = \ln(1+x) \qquad \text{e} \qquad x_0 = 0.$$

Le derivate di f sono

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \qquad \dots, \qquad f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k},$$

e quindi $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$, $f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1}(k-1)!$. Il polinomio di Taylor di grado n in $x_0 = 0$ è

$$T_n(x;0) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}.$$

4. Espressioni del resto

Data una funzione f, con un buon numero di derivate, sappiamo determinare un polinomio che la approssimi vicino ad un punto assegnato x_0. In questa approssimazione viene commesso un errore pari a

$$R_n(x;x_0) := f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k.$$

Quali proprietà conosciamo su R_n? Per ora sappiamo solo che

$$R_n(x;x_0) = o(|x-x_0|^n) \quad \text{cioè} \quad \lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x;x_0)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Questa è solo un'informazione sul comportamento al limite, quindi non dice nulla di preciso sulla grandezza della quantità R_n in punti $x \neq x_0$. Per poter stimare l'errore occorre una rappresentazione migliore di R_n. Ecco il nostro nuovo obiettivo.

Teorema 4.1. Resto in forma di Lagrange. *Se la funzione f è derivabile $n+1$ volte, esiste ξ, tra x_0 e x, tale che*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(\xi)\,(x-x_0)^{n+1},$$

Dimostrazione. Sia f derivabile $n+1$ volte e consideriamo le funzioni

$$F(x) := R_n(x;x_0) = f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k \qquad \text{e} \qquad G(x) := (x-x_0)^{n+1}.$$

Dato che $F(x_0) = G(x_0) = 0$, applicando il Teorema di Cauchy a F e G, segue

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)},$$

per qualche ξ_1, compreso tra x_0 e x. Derivando le espressioni di F e G, otteniamo

$$F'(x) = f'(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(x_0)(x - x_0)^k \qquad \text{e} \qquad G'(x) = (n+1)(x - x_0)^n.$$

Se $n \geq 1$ è possibile riapplicare il Teorema di Cauchy, trovando ξ_2, compreso tra x_0 e ξ_1 e quindi anche tra x_0 e x, per cui

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)}.$$

Iterando $n+1$ volte il procedimento, si dimostra l'esistenza di ξ_{n+1} tra x_0 e x tale che

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{G^{(n+1)}(\xi_{n+1})}.$$

Dato che $F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ e $G^{(n+1)}(x) = (n+1)!$, si deduce (qui $\xi = \xi_{n+1}$)

$$F(x) - F(x_0) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\,(G(x) - G(x_0))$$

da cui, ricordando le definizioni di F e G,

$$R_n(x; x_0) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\,(x - x_0)^{n+1},$$

cioè la conclusione. □

A partire da questa espressione del resto, possiamo stimare l'errore commesso quando si approssimi una funzione f con il suo polinomio di Taylor: se $M > 0$ è tale che $|f^{(n+1)}(t)| \leq M$ per ogni t tra x e x_0, allora

$$|R_n(x; x_0)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} \leq \frac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}.$$

Calcolo approssimato di $\sin(1/10)$ *con stima dell'errore.* Abbiamo già considerato questo problema proponendo come "candidato" per l'approssimazione il valore $1/10$. In quell'occasione avevamo stimato l'errore commesso con $1/100$. Il procedimento era basato sul Teorema di Lagrange e sull'approssimazione della funzione $\sin x$ con la sua tangente nell'origine:

$$\sin x \approx x \qquad \text{per } x \to 0.$$

Detta $f(x) = \sin x$, la stima dell'errore discendeva da

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| &= |(f'(\xi) - f'(x_0))(x - x_0)| \\ &= |f''(\eta)(\xi - x_0)(x - x_0)| \leq |f''(\eta)||x - x_0|^2. \end{aligned}$$

dove $x = 1/10$ e $x_0 = 0$. Dato che $f''(x) = -\sin x$, la stima è immediata.

Come ottenere stime migliori? La scelta naturale è approssimare la funzione $\sin x$ con un suo polinomio di Taylor di grado opportuno. Ad esempio,

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \qquad \text{per } x \to 0.$$

Quindi un'approssimazione migliore della precedente è

$$\sin\left(\frac{1}{10}\right) \approx \frac{1}{10} - \frac{1}{6000} = 0,0998\bar{3}.$$

Scriviamo l'errore con la forma di Lagrange $R_3(x; x_0) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi)(x - x_0)^4$, cioè

$$\sin\frac{1}{10} - \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{6000}\right) = R_3(1/10; 0) = \frac{\sin\xi}{4!}\frac{1}{10^4},$$

quindi

$$|R_3(1/10; 0)| \leq \frac{1}{24 \cdot 10^4} = 4,1\bar{6} \times 10^{-6}.$$

In realtà il polinomio $x - \frac{x^3}{6}$ è anche il polinomio di Taylor di $\sin x$ in 0 di grado 4, quindi il resto può anche essere scritto come

$$\sin\frac{1}{10} - \frac{1}{10} + \frac{1}{6000} = R_4(1/10; 0) = \frac{\cos\xi}{5!}\frac{1}{10^5},$$

quindi

$$|R_4(1/10; 0)| \leq \frac{1}{120 \cdot 10^5} = 8,\bar{3} \times 10^{-8}.$$

In definitiva

$$\sin\left(\frac{1}{10}\right) = 0,0998\bar{3} \pm 8,\bar{3} \times 10^{-8}.$$

CAPITOLO 3

L'integrale

Il problema della misurazione delle lunghezze di segmenti ci ha condotti per un sentiero particolarmente interessante: dai numeri naturali, ai relativi, ai razionali ed infine ai numeri reali. E se ci viene la voglia di misurare aree di regioni del piano? Nel caso di un rettangolo, l'area è nota: è il prodotto delle lunghezze dei lati. Nel caso di una regione che sia unione finita di rettangoli che si toccano al più lungo il perimetro, basta sommare le aree dei singoli rettangoli. Ma per regioni più generali?

1. L'area di un sottografico e la definizione di integrale

Data una funzione $f : [a, b] \to [0, +\infty)$, l'insieme

$$S_f = \{(x, y) \mid \quad a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f(x)\}$$

si dice sottografico di f nell'intervallo $[a, b]$. Come definire e/o calcolare l'area di un sottografico di funzione? L'area del sottografico delle funzioni costanti è elementare: se $f(x) = C \geq 0$, il sottografico S_f di f in $[a, b]$ è un rettangolo, la cui area è, da sempre, $\mathcal{A}(S_f) = (b - a)\, C$. Con poco impegno, possiamo definire una classe di funzioni il cui sottografico ha un'area facile da calcolare.

DEFINIZIONE 1.1. *Dato l'intervallo $[a, b]$, un insieme $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ tale che $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ è una* partizione di *$[a, b]$. L'*ampiezza *della partizione P è il numero $|P| := \max\{x_i - x_{i-1} : i = 1, \ldots, n\}$.*

Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione costante a tratti *(o* funzione a scala*) se esiste una partizione $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ di $[a, b]$ tale che f è costante su ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i)$ per $i = 1, \ldots, n-1$ e su $[x_{n-1}, x_n]$, ossia*

$$f(x) = \begin{cases} \alpha_i & x \in [x_{i-1}, x_i) \qquad i = 1, \ldots, n-1 \\ \alpha_n & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

dove $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sono numeri reali.

Dato che per una funzione f costante a tratti e non negativa il sottografico è un'unione finita di rettangoli, l'area di S_f è data dalla somma delle aree di questi rettangoli:

$$\mathcal{A}(S_f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i - x_{i-1})$$

dove ξ_i è un qualsiasi punto di $[x_{i-1}, x_i)$.

Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, non negativa, possiamo considerare approssimazioni del sottografico S_f date da sottografici di funzioni costanti a tratti g ed h, con $g \leq f \leq h$ in $[a, b]$ (vedi Figura 1(a)) e utilizzare le aree dei sottografici approssimanti come approssimazioni dell'area di S_f. Per poter stimare per eccesso la funzione f con una funzione costante a tratti non negativa *occorre che la funzione f sia superiormente limitata* (vedi Figura 1(b)). Per la stima dal basso con funzioni costanti a tratti, serve anche che f sia inferiormente limitata, ipotesi che nel nostro presente caso è automaticamente soddisfatta dato che f è non negativa. L'ipotesi di limitatezza della funzione f è fondamentale qui, così come in tutto il Capitolo e in tutta la definizione dell'integrale definito.

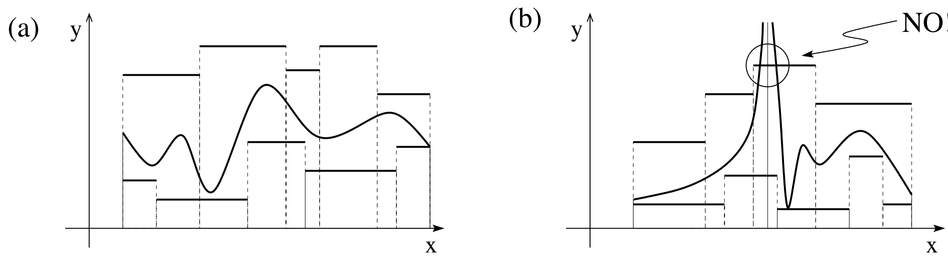

FIGURA 1. (a) Una funzione approssimata per eccesso e per difetto con due funzioni costanti a tratti. (b) Un tentativo (fallito) di approssimazione per eccesso di una funzione non limitata superiormente.

Data una partizione $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ci sono due funzioni $\underline{f}$ e $\overline{f}$, costanti a tratti negli intervalli definiti da P e tali che $\underline{f} \leq f \leq \overline{f}$, che danno la migliore stima per difetto e la migliore per eccesso. Tali funzioni sono definite da

$$\begin{aligned} \underline{f}(x) = \alpha_i &:= \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) \qquad && \forall\, x \in [x_{i-1}, x_i), \\ \overline{f}(x) = \beta_i &:= \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) \qquad && \forall\, x \in [x_{i-1}, x_i). \end{aligned}$$

In definitiva, data una partizione P dell'intervallo $[a, b]$, (tutte le volte che $\mathcal{A}(S_f)$ ha senso) si ha

$$\underline{\mathcal{A}}(S_f; P) \leq \mathcal{A}(S_f) \leq \overline{\mathcal{A}}(S_f; P).$$

dove

$$\underline{\mathcal{A}}(S_f; P) := \mathcal{A}(S_{\underline{f}}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i - x_{i-1}) \quad \overline{\mathcal{A}}(S_f; P) := \mathcal{A}(S_{\overline{f}}) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i (x_i - x_{i-1}).$$

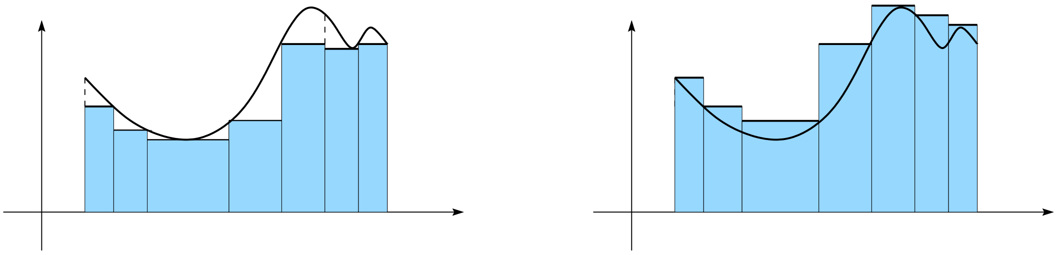

FIGURA 2. Due approssimazioni per S_f tramite le funzioni $\underline{f}$ e $\overline{f}$.

Dopo, si procede a migliorare l'approssimazione tramite la scelta di una partizione con un'ampiezza più piccola. Una possibilità è scegliere una successione di partizioni P_n con ampiezza $|P_n|$ che tenda a zero per $n \to \infty$. In questo modo, passando al limite nelle due successioni numeriche $\underline{\mathcal{A}}(S_f; P_n)$ e $\overline{\mathcal{A}}(S_f; P_n)$ si dovrebbe (incrociando le dita) ottenere proprio l'area richiesta.

ESEMPIO 1.2. Sia $f(x) = x$ per $x \in [a, b]$ con $0 \le a < b$. Il sottografico della funzione f nell'intervallo $[a, b]$ ha una forma familiare: nel caso in cui $a = 0$, si tratta di un triangolo, e nel caso di $a > 0$ si tratta di un trapezio. In entrambi casi, la geometria elementare fornisce una formula per il calcolo dell'area, che è data da:

$$\frac{(b-a)(b+a)}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

Cosa succede se si calcola l'area attraverso il procedimento di approssimazione per eccesso e per difetto proposto in precedenza?

Dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in n parti di uguale lunghezza tramite la partizione $P_n = \{x_k = a + kh \, : \, k = 0, \ldots, n\}$ dove $h = (b-a)/n$. Dato che $f(x) = x$ è crescente,

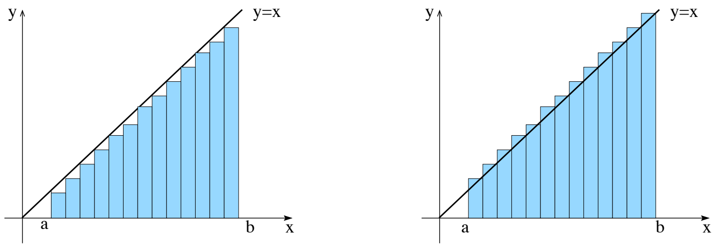

FIGURA 3. La funzione $f(x) = x$ e le approssimazioni determinate dai punti $a + \frac{k(b-a)}{n}$ con $k = 0, \ldots, n$.

$$\alpha_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} x = x_{k-1} = a + (k-1)h, \quad \beta_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} x = x_k = a + kh,$$

e $x_k - x_{k-1} = h$, valgono

$$\underline{\mathcal{A}}(S_f; P_n) = ah + \cdots + (a+(n-1)h)h = h\sum_{k=0}^{n-1}(a+kh) = hna + h^2\sum_{k=0}^{n-1} k,$$
$$\overline{\mathcal{A}}(S_f; P_n) = (a+h)h + \cdots + (a+nh)h = h\sum_{k=1}^{n}(a+kh) = hna + h^2\sum_{k=1}^{n} k$$

Tenendo conto della formula $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (dimostratela!) e di $h = \dfrac{b-a}{n}$

$$\begin{aligned}\underline{\mathcal{A}}(S_f; P_n) &= hna + h^2\frac{n(n-1)}{2} = (b-a)a + (b-a)^2\frac{n(n-1)}{2n^2}\\ \overline{\mathcal{A}}(S_f; P_n) &= hna + h^2\frac{n(n+1)}{2} = (b-a)a + (b-a)^2\frac{n(n+1)}{2n^2}.\end{aligned}$$

Per $n \to +\infty$, le due quantità tendono allo stesso limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \underline{A}(S_f; P_n) = \lim_{n\to+\infty} \overline{A}(S_f; P_n) = (b-a)a + \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2},$$

che concorda con le formule note dalla geometria elementare.

Esempio 1.3. Passiamo a considerare $f(x) = x^2$ in $[a, b]$ con $0 \le a < b$. Qual è l'espressione dell'area per il sottografico di x^2?

Con la stessa partizione P_n di prima. Dato che x^2 è crescente su $[a, b]$ per $a \ge 0$,

$$\alpha_i = \inf_{[x_{k-1},x_k]} x^2 = \big(a+(k-1)h\big)^2, \quad \beta_i = \sup_{[x_{k-1},x_k]} x^2 = \big(a+kh\big)^2,$$

da cui segue

$$\begin{aligned}\underline{\mathcal{A}}(S_f; P_n) &= a^2h + (a+h)^2h + (a+2h)^2h + \cdots + (a+(n-1)h)^2h\\ \overline{\mathcal{A}}(S_f; P_n) &= (a+h)^2h + (a+2h)^2h + \cdots + (a+nh)^2h\end{aligned}$$

Svolti i quadrati e tenuto presente che $h = \frac{b-a}{n}$, si ottiene

$$\begin{aligned}\underline{\mathcal{A}}(S_f; P_n) &= h\left\{na^2 + 2ah\sum_{k=0}^{n-1} k + h^2\sum_{k=0}^{n-1} k^2\right\}\\ &= (b-a)\left\{a^2 + \frac{2a(b-a)}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k + \frac{(b-a)^2}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2\right\}\\ \overline{\mathcal{A}}(S_f; P_n) &= h\left\{na^2 + 2ah\sum_{k=1}^{n} k + h^2\sum_{k=1}^{n} k^2\right\}\\ &= (b-a)\left\{a^2 + \frac{2a(b-a)}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k + \frac{(b-a)^2}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2\right\}\end{aligned}$$

Utilizzando le formule $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ e $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ (dimostratele!), si ottiene

$$\underline{\mathcal{A}}(S_f;P_n) = (b-a)\left\{a^2 + a(b-a)\,\frac{n-1}{n} + (b-a)^2\,\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}\right\}$$
$$\overline{\mathcal{A}}(S_f;P_n) = (b-a)\left\{a^2 + a(b-a)\,\frac{n+1}{n} + (b-a)^2\,\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right\}$$

Quindi, passando al limite per $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to+\infty} \underline{\mathcal{A}}(S_f;P_n) = \lim_{n\to+\infty} \overline{\mathcal{A}}(S_f;P_n) = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} =: \mathcal{A}(S_f).$$

che è il valore dell'area cercato.

Esempio 1.4. Sperimentiamo la tecnica per una funzione più bizzarra:

$$\textit{funzione di Dirichlet}: \qquad D(x) := \begin{cases} 0 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \\ 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \end{cases}$$

Data una qualsiasi partizione $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$, in ognuno dei sottointervalli $[x_{k-1}, x_k]$ cadono sia numeri razionali che numeri irrazionali, quindi

$$\alpha_i = \inf_{[x_{k-1},x_k]} D(x) = 0, \qquad \beta_i = \sup_{[x_{k-1},x_k]} D(x) = 1.$$

Pertanto, *per ogni partizione* P, $\underline{\mathcal{A}}(S_D;P) = 0$ e $\overline{\mathcal{A}}(S_D;P) = 1$ e quindi

$$\sup_P \underline{\mathcal{A}}(S_D;P) = 0 < 1 = \inf_P \overline{\mathcal{A}}(S_D;P).$$

Anche scegliendo partizioni P con ampiezza sempre più piccola, le stime per difetto e quelle per eccesso restano sempre ben lontane le une dalle altre. L'interpretazione che diamo di questa situazione è che *esistono sotto insiemi del piano a cui non è possibile associare un'area*, ossia, per alcuni insiemi S, l'espressione $\mathcal{A}(S)$ non ha senso!

Esempio 1.5. Ancora un esempio: $f(x) = e^x$ in $[a,b]$ con $a < b$. Scegliamo ancora una volta la partizione $P_n = \{x_k = a + kh \,:\, k = 0,\dots,n\}$ dove $h = (b-a)/n$. La funzione e^x è crescente su $[a,b]$ quindi

$$\alpha_i = \inf_{[x_{k-1},x_k]} e^x = e^{x_{k-1}} = e^a\, e^{(k-1)h}, \quad \beta_i = \sup_{[x_{k-1},x_k]} e^x = e^{x_k} = e^a\, e^{kh}.$$

Perciò

$$\underline{\mathcal{A}}(S_f;P_n) = e^a\, h\, \left[1 + e^h + e^{2h} + \cdots + e^{(n-1)h}\right] = e^a\, h\, \left[1 + e^h + (e^h)^2 + \cdots + (e^h)^{n-1}\right]$$
$$\overline{\mathcal{A}}(S_f;P_n) = e^a\, h\, \left[e^h + e^{2h} + e^{3h} + \cdots + e^{nh}\right] = e^{a+h}\, h\, \left[1 + e^h + (e^h)^2 + \cdots + (e^h)^{n-1}\right]$$

Dato che $1 + e^h + (e^h)^2 + \cdots + (e^h)^{n-1} = (e^{nh} - 1)/(e^h - 1)$ e $nh = b - a$,

$$\underline{\mathcal{A}}(S_f; P_n) = \frac{e^a\, h\,(e^{b-a} - 1)}{e^h - 1} = \frac{h}{e^h - 1}\,(e^b - e^a)$$
$$\overline{\mathcal{A}}(S_f; P_n) = \frac{e^{a+h}\, h\,(e^{b-a} - 1)}{e^h - 1} = \frac{h}{e^h - 1}\,e^h\,(e^b - e^a)$$

Quindi, passando al limite per $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to+\infty} \underline{\mathcal{A}}(S_f; P_n) = \lim_{n\to+\infty} \overline{\mathcal{A}}(S_f; P_n) = e^b - e^a,$$

che è il valore cercato.

Tiriamo le fila di quello che abbiamo fatto fin qui. Considerando l'"area di una regione del piano" un concetto intuitivo, abbiamo considerato il caso di sottografici di funzioni non negative, proponendo un algoritmo per il calcolo dell'area: approssimare per difetto e per eccesso l'area richiesta tramite aree di sottografici di funzioni costanti a tratti e, facendo tendere l'ampiezza della partizione a 0, ottenere il valore dell'area cercata. Tramite un certo numero di esempi, ci siamo resi conto che il procedimento è ragionevole, ma che in alcune situazioni non porta a nessuna conclusione (come per la funzione di Dirichlet).

Mettendo da parte, per il momento, il problema dell'area e battezziamo le funzioni per cui il procedimento di sopra descritto converge *funzioni integrabili* e il valore limite delle approssimazioni *integrale (definito) della funzione*. Rispetto a quanto fatto in precedenza, c'è una differenza essenziale: *le funzioni che consideriamo possono avere segno qualsiasi.*

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata e $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partizione di $[a, b]$. Poniamo

$$\alpha_i := \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x) \qquad \text{e} \qquad \beta_i := \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x).$$

Definizione 1.6. Somme integrali. *Si chiamano* somma integrale per difetto/per eccesso di f relativamente alla partizione P, *i valori delle somme*

$$\underline{S}(f; P) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i - x_{i-1}) \qquad e \qquad \overline{S}(f; P) := \sum_{i=1}^{n} \beta_i (x_i - x_{i-1}).$$

La condizione di limitatezza della funzione f garantisce che, per ogni partizione P, le somme integrali per difetto e per eccesso sono sempre ben definite.

Definizione 1.7. Integrale definito. *Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata si dice* integrabile (secondo Riemann) *se vale l'uguaglianza*

$$\sup_P \underline{S}(f; P) = \inf_P \overline{S}(f; P), \tag{25}$$

dove l'estremo superiore e l'estremo inferiore sono presi nell'insieme di tutte le partizioni P dell'intervallo $[a, b]$.

*Il valore comune è l'*integrale definito di f in $[a, b]$ *e si indica*[1] *con*

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

La lettera usata per indicare la variabile di integrazione è indifferente: al posto di $\int_a^b f(x)\, dx$, si può scrivere $\int_a^b f(t)\, dt$ o $\int_a^b f(u)\, du$ (come per le sommatorie, in cui il nome dato all'indice è ininfluente).

OSSERVAZIONE 1.8. Nella definizione di integrale, non viene fatta nessuna richiesta di positività della funzione. Se la *funzione integranda* f è positiva in $[a, b]$ ed è integrabile, l'integrale da la definizione di area del sottografico di f in $[a, b]$

$$f \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{A}(\{(x, y) \,:\, a \leq x \leq b,\, 0 \leq y \leq f(x)\}) := \int_a^b f(x)\, dx.$$

Se f è negativa in tutto o in parte dell'intervallo, il significato dell'integrale non è più quello di un'area: *l'integrale è somma di termini positivi e negativi, gli uni e gli altri in corrispondenza delle zone in cui il grafico è sopra o sotto l'asse x* (vedi Figura 4).

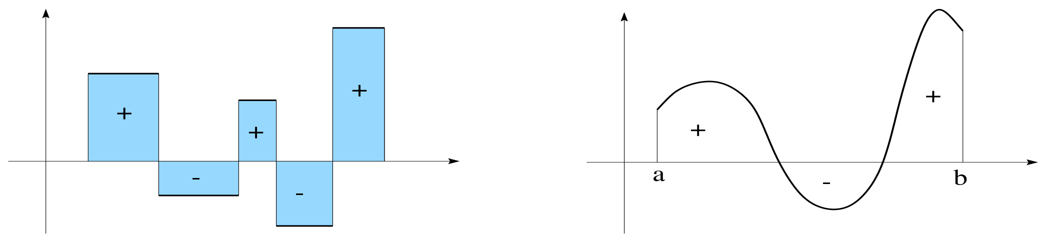

FIGURA 4. L'integrale non è l'area: (a) una funzione costante a tratti, (b) una funzione qualsiasi.

La condizione di integrabilità data dalla definizione è chiara e limpida da un punto di vista di rigore matematico. Meno chiaro è come rispondere concretamente alla domanda: quali classi di funzioni sono integrabili?

PROPOSIZIONE 1.9. *Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile in $[a, b]$ se e solo se*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \exists\, P_\varepsilon \qquad t.c. \qquad \overline{S}(f; P_\varepsilon) - \underline{S}(f; P_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{26}$$

[1] Il simbolo dell'integrale è una variante del simbolo di somma indicato da una lunga S come si usava al tempo di Leibnitz. Il simbolo dx è l'erede della lunghezza dell'intervallo $x_i - x_{i-1}$. L'uso della "d" minuscola ricorda che le approssimazioni migliori si ottengono considerando partizioni con ampiezza piccola: $\Delta x := x_i - x_{i-1} \approx dx$.

La condizione espressa in (26) può essere riscritta come

$$\overline{S}(f;P_\varepsilon) - \underline{S}(f;P_\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i)\,(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$$

con α_i e β_i definiti in precedenza. Dato che tale condizione è sufficiente, per dimostrare l'integrabilità di una funzione occorre stimare la differenza $\beta_i - \alpha_i$, cioè la variazione $|f(y) - f(x)|$ per $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$ per partizioni con ampiezza piccola.

Dimostrazione della Proposizione 1.9. La definizione di integrabilità e le proprietà dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore indicano che per ogni $\varepsilon > 0$, esistono partizioni P'_ε e P''_ε tali che $\overline{S}(f;P'_\varepsilon) - \underline{S}(f;P''_\varepsilon) < \varepsilon$. Occorre ora dimostrare che la stessa stima vale per una scelta opportuna di una stessa partizione P_ε.

Passo 1. Dimostriamo prima di tutto che

$$\underline{S}(f;P_1) \le \underline{S}(f;P_2) \qquad \text{e} \qquad \overline{S}(f;P_2) \le \overline{S}(f;P_1) \qquad \forall\, P_2 \subset P_1. \tag{27}$$

Dato che $P_2 \subset P_1$, si può costruire P_2 a partire da P_1 aggiungendo un numero finito di punti, basta studiare il caso in cui $P_2 = P_1 \cup \{\xi\}$ (il caso generale si ottiene iterando il procedimento). Inoltre consideriamo solo le somme per difetto, l'altra parte è analoga.

Supponiamo $P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ e $\xi \in (x_{k-1}, x_k)$ per un opportuno $k \in \{1, \dots, n\}$. Le espressioni di $\underline{S}(f;P_1)$ e di $\underline{S}(f;P_2)$ coincidono in tutti i termini tranne in quelli relativi all'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$ e quindi, indicando con

$$\alpha = \inf_{[x_{k-1},x_k]} f(x), \qquad \alpha' = \inf_{[x_{k-1},\xi]} f(x), \qquad \alpha'' = \inf_{[\xi,x_i]} f(x),$$

vale, dato che $\alpha \le \alpha'$ e $\alpha \le \alpha''$,

$$\begin{aligned}
\underline{S}(f;P_2) - \underline{S}(f;P_1) &= \Big[\alpha'(x_k - \xi) + \alpha''(\xi - x_{k-1})\Big] - \alpha(x_k - x_{k-1}) \\
&= \Big[\alpha'(x_k - \xi) + \alpha''(\xi - x_{k-1})\Big] - \Big[\alpha(x_k - \xi) + \alpha(\xi - x_{k-1})\Big] \\
&= (\alpha' - \alpha)(x_k - \xi) + (\alpha'' - \alpha)(\xi - x_{k-1}) \ge 0,
\end{aligned}$$

Passo 2. Ora dimostriamo che

$$\underline{S}(f;P') \le \overline{S}(f;P'') \qquad \forall\, P',\, P'' \text{ partizioni.}$$

Infatti, per costruzione, $\underline{S}(f;P) \le \overline{S}(f;P)$ per ogni partizione P. Quindi, se consideriamo la partizione $P = P' \cup P''$ e utilizziamo (27):

$$\underline{S}(f;P') \le \underline{S}(f;P) \le \overline{S}(f;P) \le \overline{S}(f;P'').$$

Passo 3. Infine, dimostriamo la Proposizione. Per ogni partizione P, vale

$$0 \le \inf_P \overline{S}(f;P) - \sup_P \underline{S}(f;P) \le \overline{S}(f;P) - \underline{S}(f;P)$$

Se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione P_ε che verifica (26), allora

$$0 \le \inf_P \overline{S}(f;P) - \sup_P \underline{S}(f;P) < \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0,$$

cioè $\inf_P \overline{S}(f;P) = \sup_P \underline{S}(f;P)$, e f è integrabile.

Se invece supponiamo che la funzione f sia integrabile, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due partizioni P'_ε e P''_ε per cui vale $\overline{S}(f;P'_\varepsilon) - \underline{S}(f;P''_\varepsilon) < \varepsilon$. Scegliendo $P_\varepsilon = P'_\varepsilon \cup P''_\varepsilon$, grazie a $\underline{S}(f;P''_\varepsilon) \le \underline{S}(f;P_\varepsilon)$ e $\overline{S}(f;P_\varepsilon) \le \overline{S}(f;P'_\varepsilon)$,

$$\overline{S}(f;P_\varepsilon) - \underline{S}(f;P_\varepsilon) \le \overline{S}(f;P'_\varepsilon) - \underline{S}(f;P''_\varepsilon) < \varepsilon,$$

cioè la condizione (26). □

Se si costruisce una successione di partizioni P_n per cui

$$\lim_{n\to+\infty} \underline{S}(f;P_n) = \lim_{n\to+\infty} \overline{S}(f;P_n) = \ell,$$

a maggior ragione si avrà che: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione P_n per cui vale

$$0 \le \overline{S}(f;P_n) - \underline{S}(f;P_n) = \big[\overline{S}(f;P_n) - \ell\big] + \big[\ell - \underline{S}(f;P_n)\big] < 2\varepsilon$$

cioè la funzione f è integrabile e l'integrale è il valore ℓ. In particolare, gli Esempi 1.2, 1.3, 1.5 indicano che le funzioni x, x^2 e e^x sono integrabili in $[a,b]$ e che valgono

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}, \qquad \int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}, \qquad \int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a.$$

L'Esempio 1.4 mostra che *esistono anche funzioni non integrabili!*

Il volume di solidi di rotazione. L'integrale è utile per il calcolo delle aree, ma anche, in alcune situazioni speciali, per il calcolo di volumi di solidi. Consideriamo una funzione $f : [a,b] \to [0,+\infty)$ continua e disegniamone il grafico Γ_f. Se si fa ruotare il grafico Γ_f attorno all'asse x, si ottiene la superficie laterale di un solido Σ. Qual'è il suo volume? Come per il calcolo delle aree, anche nel calcolo dei volumi bisogna partire da una formula nota. Qui, diamo per buona la regola che ci è stata insegnata da bambini: il volume di un cilindro di raggio di base r e altezza h è $\pi r^2 h$.

Ragionando in maniera simile a quanto fatto per la determinazione dell'area di un sottografico, approssimiamo il solido con l'unione di oggetti di cui conosciamo il volume. La scelta più ragionevole è l'unione di cilindri ottenuti tramite una rotazione di rettangoli con lati paralleli agli assi x e y come in Figura 5(b) Un'approssimazione di questo genere di Σ, si ottiene tramite la scelta di una partizione $P = \{a \equiv x_0 <$

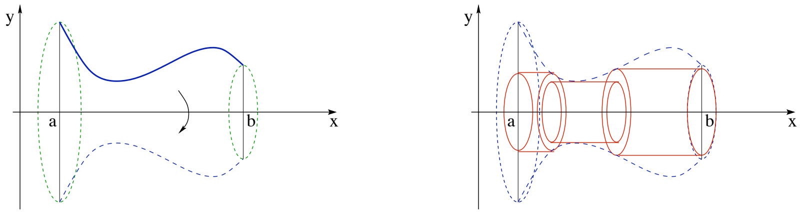

FIGURA 5. (a) Un solido di rotazione; (b) Una sua approssimazione con cilindri.

$x_1 < \cdots < x_n = b\}$ dell'intervallo $[a, b]$ e di n punti $\xi_1, \ldots, \xi_n$ tali che $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Quindi l'approssimazione del volume $\mathcal{V}(\Sigma)$ di Σ è data da

$$\mathcal{V}(\Sigma) \approx \sum_{i=1}^{n} \pi f^2(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Quando l'ampiezza della partizione tende a zero, l'errore di approssimazione tende a zero e si ottiene la formula desiderata

$$\mathcal{V}(\Sigma) = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Collaudiamo la formula con un paio di esempi.

ESEMPIO 1.10. **Il volume del cono.** Un cono di altezza h e raggio di base r, si può ottenere tramite una rotazione del grafico della funzione

$$f(x) = \frac{rx}{h} \qquad\qquad x \in [0, h].$$

Quindi

$$\mathcal{V}(\Sigma) = \pi \int_0^h \left(\frac{rx}{h}\right)^2 dx = \frac{\pi\, r^2}{h^2} \int_0^h x^2\, dx = \frac{\pi\, r^2}{h^2}\,\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\,\pi\, r^2\, h,$$

che è la tradizionale formula del volume del cono.

ESEMPIO 1.11. **Il volume della sfera.** Una sfera di raggio r si ottiene con la rotazione del grafico di

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \qquad\qquad x \in [-r, r].$$

Applicando la formula del volume

$$\mathcal{V}(\Sigma) = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right)\, dx = \pi \left\{2r^3 - \frac{2}{3} r^3\, dx\right\} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Anche questa volta, giustamente, i conti tornano!

ESERCIZIO 1.12. *Qual'è il volume del solido ottenuto facendo ruotare il grafico di e^x per $x \in [0, 1]$ attorno all'asse x?*

2. Istruzioni per l'uso

L'integrale di una funzione limitata è l'estremo superiore/inferiore di opportune sommatorie. Per le sommatorie valgono tre proprietà fondamentali: dati $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si hanno

$$\textit{linearità:} \qquad \sum_{k=1}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k + \beta \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$\textit{additività:} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k$$

$$\textit{monotonìa:} \qquad a_k \le b_k \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k \le \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Di conseguenza, analoghe proprietà vengono ereditate dagli integrali definiti.

<u>Linearità</u>. *Una combinazione lineare di funzioni integrabile è integrabile: dati* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *e* f, g *integrabili in* $[a, b]$, *la funzione* $c_1 f + c_2 g$ *è integrabile e vale*

$$\int_a^b [c_1 f(x) + c_2 g(x)]\, dx = c_1 \int_a^b f(x)\, dx + c_2 \int_a^b g(x)\, dx \tag{28}$$

<u>Additività</u>. *Sia* f *integrabile in* $[a, b]$ *e sia* $c \in (a, b)$. *Allora* f *è integrabile in* $[a, c]$ *e in* $[c, b]$ *e vale*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx \qquad \forall\, a < c < b. \tag{29}$$

In particolare, allora f *è integrabile in ogni sottointervallo di* $[a, b]$.

<u>Monotonìa</u>. *Per ogni coppia di funzioni* f, g *integrabili in* $[a, b]$,

$$f(x) \le g(x) \quad \forall\, x \in [a, b] \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)\, dx \le \int_a^b g(x)\, dx. \tag{30}$$

Per ora abbiamo definito $\int_a^b f(x)\, dx$ solo nel caso $a < b$. E' usanza diffusa *definire l'integrale nel caso di* $a = b$ *o* $a > b$*, in modo che sia preservata la regola dell'additività.* Scrivendo (29) con $c = a$, si ottiene

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^a f(x)\, dx + \int_a^b f(x)\, dx,$$

da cui segue

$$\int_a^a f(x)\, dx := 0,$$

coerente con l'eventuale interpretazione in termini di aree.

Scriviamo (29) per $b = a$, allora

$$0 = \int_a^a f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx$$

da cui segue la definizione

$$\int_c^a f(x)\,dx := -\int_a^c f(x)\,dx \qquad a < c,$$

dove il membro destro ha il significato definito nel paragrafo precedente.

Dalla proprietà di monotonìa dell'integrale discende una proprietà che è, sostanzialmente, una "disuguaglianza triangolare per integrali":

PROPOSIZIONE 2.1. *Se la funzione limitata $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile in $[a, b]$, allora anche $|f|$ è integrabile in $[a, b]$ e vale*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{31}$$

Dedichiamoci ora a dimostrare le proprietà dell'integrale. Le proprietà di linearità e di additività contengono due parti. Una prima parte concerne il fatto che dall'integrabilità di alcune funzioni se ne deduce l'integrabilità di certe altre. La seconda parte mette in relazione tra loro gli integrali definiti delle varie funzioni.

Linearità. Siano f e g integrabili in $[a, b]$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Data $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, partizione di $[a, b]$, battezziamo

$$\alpha_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} [c_1 f(x) + c_2 g(x)] \qquad \text{e} \qquad \beta_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} [c_1 f(x) + c_2 g(x)],$$

e, analogamente,

$$\alpha_i^f = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x), \quad \beta_i^f = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x), \qquad \alpha_i^g = \inf_{[x_{i-1},x_i]} g(x), \quad \beta_i^g = \sup_{[x_{i-1},x_i]} g(x).$$

Per ogni $x, y \in (x_{i-1}, x_i)$, si ha

$$\begin{aligned}[c_1 f(x) + c_2 g(x)] - [c_1 f(y) + c_2 g(y)] &= c_1 [f(x) - f(y)] + c_2 [g(x) - g(y)] \\ &\le |c_1|\big(\beta_i^f - \alpha_i^f\big) + |c_2|\big(\beta_i^g - \alpha_i^g\big),\end{aligned}$$

quindi, passando all'estremo superiore in x e all'estremo inferiore in y, si deduce che

$$\beta_i - \alpha_i \le |c_1|\big([\beta_i^f - \alpha_i^f\big) + |c_2|\big(\beta_i^g - \alpha_i^g\big).$$

Perciò, per ogni partizione P di $[a,b]$,

$$
\begin{aligned}
\overline{S}(c_1 f + c_2 g; P) - \underline{S}(c_1 f + c_2 g; P) &= \sum_{i=1}^{n} [\beta_i - \alpha_i]\,(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq |c_1| \sum_{i=1}^{n} \left[\beta_i^f - \alpha_i^f\right](x_i - x_{i-1}) + |c_2| \sum_{i=1}^{n} [\alpha_i^g - \beta_i^g]\,(x_i - x_{i-1}) \\
&= |c_1| \left[\overline{S}(f;P) - \underline{S}(f;P)\right] + |c_2| \left[\overline{S}(g;P) - \underline{S}(g;P)\right].
\end{aligned}
$$

Dato che la funzione f è integrabile, grazie alla Proposizione 1.9, esiste una partizione P_1 tale che $\overline{S}(f;P_1) - \underline{S}(f;P_1) < \varepsilon$. Analogamente, esiste una partizione P_2 per cui $\overline{S}(g;P_1) - \underline{S}(g;P_1) < \varepsilon$. Scegliendo la partizione $P = P_1 \cup P_2$, entrambe le disequazioni sono soddisfatte e quindi

$$
\overline{S}(c_1 f + c_2 g; P) - \underline{S}(c_1 f + c_2 g; P) < (|c_1| + |c_2|)\,\varepsilon.
$$

Dalla Proposizione 1.9, segue che la funzione $c_1 f + c_2 g$ è integrabile in $[a,b]$.

Resta da dimostrare la formula (28). Data la solita partizione $P = \{x_0, \dots, x_n\}$, scegliamo $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ con $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ per $i = 1, \dots, n$. Dato che

$$
\underline{S}(f;P) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \overline{S}(f;P), \qquad \underline{S}(f;P) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \overline{S}(f;P),
$$

si ha

$$
\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \leq \overline{S}(f;P) - \underline{S}(f;P) \tag{32}
$$

Aggiungendo e sottraendo i termini opportuni, si ricava

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_a^b [c_1 f + c_2 g]\ dx - c_1 \int_a^b f\,dx - c_2 \int_a^b g\,dx \right| \\
&\quad \leq \left| \int_a^b [c_1 f + c_2 g]\ dx - \sum_{i=1}^{n} [c_1 f(\xi_i) + c_2 g(\xi_i)]\,(x_i - x_{i-1}) \right| \\
&\qquad + |c_1| \left| \int_a^b f\,dx - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| + |c_2| \left| \int_a^b g\,dx - \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right|.
\end{aligned}
$$

Utilizzando (32), si deduce la disuguaglianza

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_a^b [c_1 f + c_2 g]\ dx - c_1 \int_a^b f\,dx - c_2 \int_a^b g\,dx \right| \\
&\quad \leq \overline{S}(c_1 f + c_2 g; P) - \underline{S}(c_1 f + c_2 g; P) \\
&\qquad + |c_1| \left[\overline{S}(f;P) - \underline{S}(f;P)\right] + |c_2| \left[\overline{S}(g;P) - \underline{S}(g;P)\right].
\end{aligned}
$$

Scegliendo un partizione P per cui

$$\overline{S}(f;P) - \underline{S}(f;P) < \varepsilon, \quad \overline{S}(g;P) - \underline{S}(g;P) < \varepsilon,$$
$$\overline{S}(c_1 f + c_2 g;P) - \underline{S}(c_1 f + c_2 g;P) < \varepsilon,$$

si ottiene

$$\left| \int_a^b [c_1 f + c_2 g]\,dx - c_1 \int_a^b f\,dx - c_2 \int_a^b g\,dx \right| \leq (1 + |c_1| + |c_2|)\,\varepsilon.$$

Dato che ε è arbitrariamente piccolo, non c'è scampo: (28) è dimostrata.

La linearità garantisce, in particolare, che la somma di funzioni integrabili è integrabile. Lo stesso vale per il prodotto, come enunciato nell'esercizio che segue (ma non è vero che l'integrale del prodotto è il prodotto degli integrali!).

Esercizio 2.2. *Se f e g sono integrabili in $[a,b]$, anche il prodotto fg lo è.*

Additività. Se si pensa all'idea geometrica di partenza, la proprietà di additività sembra abbastanza naturale: per calcolare l'area possiamo dividere la regione in due parti e sommare i valori delle aree delle due sottoregioni. Ma qui la cosa è diversa: prima di tutto abbiamo una definizione analitica da rispettare e ogni affermazione deve discendere rigorosamente da quella definizione. In più c'è un particolare non banale: chi garantisce che se una funzione è integrabile in $[a,b]$, allora è anche integrabile in $[a,c]$ e $[c,b]$ per $c \in (a,b)$? Seppur ragionevole, quest'affermazione è tutta da verificare.

Per comodità, introduciamo la funzione $\chi_E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\text{funzione caratteristica di } E: \qquad \chi_E(x) := \begin{cases} 1 & x \in E, \\ 0 & x \notin E. \end{cases}$$

Se l'insieme E è un intervallo, la funzione χ_E è integrabile. Quindi, se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile in $[a,b]$ e $c \in [a,b]$, allora sono integrabili anche le funzioni prodotto $f\chi_{[a,c]}(x)$ e $f\chi_{[c,b]}(x)$ e vale l'uguaglianza

$$f(x) = f(x)\chi_{[a,c]}(x) + f(x)\chi_{[c,b]}(x),$$

Inoltre, dato che moltiplicare per una funzione caratteristica si traduce nel "troncare a zero" la funzione f fuori dall'insieme corrispondente, si hanno

$$\int_a^b f(x)\chi_{[a,c]}(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_a^b f(x)\chi_{[c,b]}(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx.$$

Quindi, grazie alla linearità,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\chi_{[a,c]}(x)\,dx + \int_a^b f(x)\chi_{[c,b]}(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

<u>*Monotonìa*</u>. Dimostrare la monotonìa dell'integrale è particolarmente facile. Se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$, allora

$$\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \leq \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} g(x) \qquad \forall [x_{i-1},x_i] \subset [a,b].$$

Quindi, per ogni partizione P di $[a,b]$, vale $\underline{S}(f;P) \leq \underline{S}(g;P)$, e passando all'estremo superiore si ottiene la conclusione.

Dimostrazione della Proposizione 2.1. La parte più complicata della dimostrazione sta nel verificare che effettivamente la funzione $|f|$ sia integrabile.

Il problema è sempre lo stesso: data $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ partizione di $[a,b]$ e posti $A_k = \inf_{[x_{k-1},x_k]} |f(x)|$, $B_k = \sup_{[x_{k-1},x_k]} |f(x)|$, quale stima possiamo recuperare per $B_k - A_k$?

Siano $\alpha_k = \inf_{[x_{k-1},x_k]} f(x)$, $\beta_k = \sup_{[x_{k-1},x_k]} f(x)$, dati x, y in (x_{k-1}, x_k), si ha

$$\big||f(x)| - |f(y)|\big| \leq |f(x) - f(y)| \leq \beta_k - \alpha_k,$$

e prendendo l'estremo superiore in x e l'inferiore in y si ottiene $B_k - A_k \leq \beta_k - \alpha_k$.

Con questa stima alla mano, si deduce che

$$\overline{S}(|f|;P) - \underline{S}(|f|;P) \leq \sum_{k=1}^{n} (\beta_k - \alpha_k)(x_k - x_{k-1}) = \overline{S}(f;P) - \underline{S}(f;P).$$

e grazie alla Proposizione 1.9 si arriva alla conclusione.

La stima finale segue da $\pm f \leq |f|$, che, grazie alla monotonìa dell'integrale, implica

$$\pm \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

da cui segue la conclusione. $\square$

Esercizio 2.3. *Date f e g integrabili, dimostrare che anche* $f_+(x) := \max\{f(x), 0\}$, $f_-(x) := -\min\{f(x), 0\}$, $\max\{f(x), g(x)\}$ *e* $\min\{f(x), g(x)\}$ *sono integrabili.*

Una volta dato senso al concetto di integrale e determinate le proprietà principali, bisogna dedicarsi a determinare un certo numero di funzioni che siano effettivamente integrabili, altrimenti l'oggetto appena definito risulterebbe sostanzialmente inutile. Come si è detto, per dimostrare l'integrabilità di f, basta mostrare

$$\forall\, \varepsilon > 0 \qquad \exists\, P_\varepsilon \text{ partizione} \quad \text{tale che} \quad \overline{S}(f;P_\varepsilon) - \underline{S}(f;P_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

Dunque seguiremo questa strategia: fissata una partizione P, mostreremo che la differenza $\overline{S}(f;P) - \underline{S}(f;P)$ può essere resa arbitrariamente piccola, a patto di scegliere una partizione P la cui ampiezza $|P|$ sia sufficientemente piccola.

La prima classe che consideriamo è quella delle funzioni monotòne in un intervallo chiuso e limitato. Tali funzioni sono sempre limitate (perché?).

Teorema 2.4. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotòna, allora è integrabile in $[a,b]$.*

Dimostrazione. Supponiamo che f sia una funzione crescente. Data una partizione $P = \{x_0, \dots, x_n\}$, gli estremi inferiori e superiori di f in $[x_{i-1}, x_i]$ sono

$$\alpha_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(x_{i-1}) \qquad \text{e} \qquad \beta_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(x_i).$$

Le somme integrali per difetto e per eccesso sono date da

$$\underline{S}(f;P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_{i-1} - x_i) \qquad \text{e} \qquad \overline{S}(f;P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_{i-1} - x_i).$$

e la loro differenza è stimata da

$$\overline{S}(f;P) - \underline{S}(f;P) = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})]\ (x_{i-1} - x_i)$$

Indicando con $|P|$ l'ampiezza di P, cioè il massimo delle lunghezze $x_{i-1} - x_i$,

$$\overline{S}(f;P) - \underline{S}(f;P) \le |P| \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] = |P|\,[f(b) - f(a)]\,.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$, è possibile scegliere $|P|$ sufficientemente piccola, in modo che la differenza $\overline{S}(f;P) - \underline{S}(f;P)$ sia minore di ε, pertanto, grazie (ancora una volta!) alla Proposizione 1.9, la funzione è integrabile. □

A partire dalle funzioni monotone e grazie al fatto che combinazioni lineari di funzioni integrabili sono integrabili, è possibile costruire una classe ancora più ampia di funzioni. Ad esempio, sia f una funzione definita in $[a,b]$ tale che, per qualche $c \in [a,b]$, la funzione f è crescente in $[a,c]$ e decrescente in $[c,b]$. Allora la funzione f si può riscrivere come differenza di due funzioni crescenti (vedi Figura 6):

$$f = f_1 - f_2$$

dove

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [a,c] \\ f(c) & x \in [c,b] \end{cases} \qquad \text{e} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 0 & x \in [a,c] \\ f(c) - f(x) & x \in [c,b] \end{cases}$$

Quindi, anche funzioni con un cambio di monotonia sono integrabili. Con una costruzione analoga, si mostra che *tutte le funzioni con un numero finito di cambi di monotonia sono integrabili.* Ad esempio, tutti i polinomi e, più in generale, tutte le funzioni razionali sono integrabili.

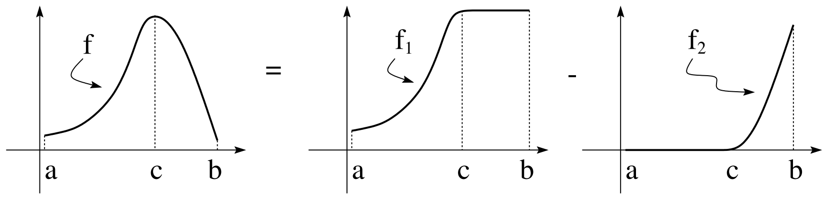

FIGURA 6. Una funzione f con un cambio di monotonia, decomposta come differenza delle funzioni crescenti f_1 e f_2.

La seconda classe che consideriamo è quella delle *funzioni lipschitziane*, cioè delle funzioni $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tali che esista $L > 0$ per cui

$$\exists\, L > 0 \qquad \text{t.c.} \qquad |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \qquad \forall\, x, y \in [a, b].$$

TEOREMA 2.5. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ lipschitziana, allora è integrabile in $[a, b]$.*

DIMOSTRAZIONE. Fissata la beneamata partizione $P = \{x_0, x_1 \ldots, x_n\}$,

$$\overline{S}(f; P) - \underline{S}(f; P) = \sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i)(x_i - x_{i-1}),$$

con il solito significato per α_i e β_i. Dato che f è lipschitziana, essa è anche continua in $[a, b]$, quindi ammette massimo e minimo in ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ e vale

$$\alpha_i = \inf_{(x_{i-1},x_i)} f = \min_{[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(\eta_i) \qquad \text{e} \qquad \alpha_i = \sup_{(x_{i-1},x_i)} f = \max_{[x_{i-1},x_i]} f(x) = f(\xi_i)$$

con η_i e ξ_i, rispettivamente, un punto di massimo ed uno di minimo della funzione f in $[x_{i-1}, x_i]$. Sostituendo nella relazione precedente, si ottiene

$$\overline{S}(f; P) - \underline{S}(f; P) = \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i) - f(\eta_i))(x_i - x_{i-1}) \leq L \sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|(x_i - x_{i-1}).$$

Dato che $\xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$, la differenza $|\xi_i - \eta_i|$ è minore o uguale dell'ampiezza $|P|$ della partizione. Quindi

$$\overline{S}(f; P) - \underline{S}(f; P) \leq L|P| \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \leq L(b - a)|P|.$$

Scegliendo P tale che $|P| < \varepsilon/L(b-a)$, la differenza $\overline{S}(f; P) - \underline{S}(f; P)$ è strettamente minore di ε e, grazie alla Proposizione 1.9, segue la conclusione. □

Più in generale si può dimostrare il fondamentale

TEOREMA 2.6. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, allora f è integrabile in $[a, b]$.*

La dimostrazione passa per il concetto di *uniforme continuità*. Non daremo qui ulteriori dettagli sulla questione.

ESERCIZIO 2.7. *Dimostrare che la composizione di una funzione lipschitziana con una funzione integrabile dà luogo ad una funzione integrabile.*

3. Il Teorema della media integrale

Tutte le funzioni $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabili sono, per definizione, funzioni limitate. In particolare questo significa che data una funzione integrabile, il suo integrale definito può sempre essere stimato in maniera "rude": per le proprietà di monotonìa dell'integrale, se $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$,

$$m(b-a) = \int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx = M(b-a),$$

Questa formula è intuitivamente ovvia: se pensiamo ad una funzione non negativa e all'integrale come area, le quantità $M(b-a)$ e $m(b-a)$ rappresentano le aree di una rettangolo circoscritto ed inscritto nel sottografico di f (vedi Figura 7).

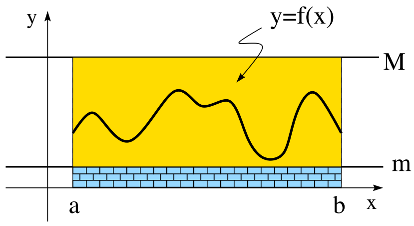

FIGURA 7. Significato geometrico della stima $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$.

La formula precedente si può riscrivere come $m \leq \langle f \rangle \leq M$ dove $\langle f \rangle$, detto **media integrale**[2] di f in $[a, b]$, è definito da

$$\langle f \rangle := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx. \tag{33}$$

Quindi, espresso a parole, *la media integrale di una funzione f è sempre compresa tra un qualsiasi minorante ed un qualsiasi maggiorante di f.*

---

[2]La *media aritmetica* dei numeri $f_1, f_2, \ldots, f_n$ è, per definizione $(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)/n$. La media integrale di una funzione in un intervallo è, in un certo senso, limite di medie aritmetiche di valori assunti dalla funzione. Infatti, data la partizione di $[a, b]$ in sottointervalli di lunghezza $\Delta x_i = (b-a)/n$ per ogni i e scelti $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, la media aritmetica di $f(\xi_1), \ldots, f(\xi_n)$ è pari a

$$\frac{f(\xi_1) + \cdots + f(\xi_n)}{n} = \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Per $n \to \infty$, il termine a destra converge proprio alla media integrale di f in $[a, b]$.

Se f è continua in un intervallo $[a, b]$, si può dire qualcosa di più. Per il teorema di Weierstrass, esistono due punti $\xi, \eta \in [a, b]$ tali che

$$\min_{[a,b]} f(x) = f(\xi) \leq f(x) \leq f(\eta) = \max_{[a,b]} f(x) \qquad \forall\, x \in [a, b].$$

Quindi $\langle f \rangle$, definita in (33) è compresa tra il massimo ed il minimo della funzione f in $[a, b]$. Grazie al Teorema del valore intermedio, si può concludere che *per una funzione f continua in $[a, b]$, la media integrale fa sempre parte dell'insieme immagine $f([a, b])$.*

Teorema 3.1. Teorema della Media Integrale. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora esiste $\xi \in [a, b]$ tale che $f(\xi) = \langle f \rangle$ con $\langle f \rangle$ definito in (33).*

Nel caso di una funzione non negativa f, il teorema equivale ad affermare che esiste un rettangolo di base $[a, b]$ ed una altezza $f(\xi)$ opportuna con la stessa area del sottografico di f in $[a, b]$.

Non è particolarmente sconvolgente (ma più avanti servirà) osservare che la formula (33) vale anche nel caso $b < a$, infatti

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx = \frac{1}{a-b} \int_b^a f(x)\, dx,$$

e a quest'ultimo termine si può applicare il Teorema della Media Integrale.

Controesempio 3.2. Se la funzione f non è continua in tutto $[a, b]$, non è detto che valga la conclusione del Teorema 3.1 Ad esempio, si consideri la funzione

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & x < 0, \\ 0 & x = 0, \\ +1 & x > 0, \end{cases}$$

nell'intervallo $[-1, 2]$. Allora f è integrabile (per almeno due motivi... quali?)

$$\mu = \frac{1}{2-(-1)} \int_{-1}^{2} \operatorname{sgn} x\, dx = \frac{1}{3}(-1+2) = \frac{1}{3},$$

che non fa parte dell'immagine della funzione $\operatorname{sgn} x$.

Esercizio 3.3. *Siano $f \in C([a, b])$ e $p \in C([a, b])$ tale che $p(x) > 0$ per ogni x. Dimostrare che esiste $\xi \in [a, b]$ tale che*

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)p(x)\, dx}{\int_a^b p(x)\, dx}.$$

Soluzione. Se m e M indicano il minimo ed il massimo di f in $[a, b]$, grazie al fatto che $p(x) > 0$, si ha $mp(x) \leq f(x)p(x) \leq Mp(x)$ per ogni x. Integrate in $[a, b]$, mescolate e concludete...

4. Il Teorema fondamentale del calcolo integrale

Una volta fissata la funzione f, l'integrale definito è una funzione degli estremi di integrazione a e b. Per studiare questa dipendenza, supponiamo l'estremo inferiore fissato al valore a e indichiamo l'estremo superiore (variabile) con x: consideriamo, quindi, la funzione integrale

$$\phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \tag{34}$$

La formula (34) può essere utilizzata per "generare nuove funzioni" a partire da una funzione integrabile f. Ad esempio, si può definire[3]

$$\phi(x) := \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \qquad x > 0,$$

che ha perfettamente senso, dato che la funzione $\frac{1}{t}$ è una funzione continua in ogni intervallo $[a, b]$ con $0 < a \leq b$.

Proposizione 4.1. *Se f è integrabile in $[a, b]$, la funzione ϕ, definita in (34), è lipschitziana.*

Dimostrazione. Dato che f è integrabile, essa è anche limitata. Sia $M > 0$ tale che $|f(t)| \leq M$ per ogni $t \in [a, b]$, allora,

$$\text{se } x < y, \quad |\phi(x) - \phi(y)| = \left| \int_x^y f(t)\,dt \right| \leq \int_x^y |f(t)|\,dt \leq M(y - x);$$

$$\text{se } x > y, \quad |\phi(x) - \phi(y)| = \left| -\int_y^x f(t)\,dt \right| \leq \int_y^x |f(t)|\,dt \leq M(x - y).$$

Quindi

$$|f(t)| \leq M \qquad \Longrightarrow \qquad |\phi(x) - \phi(y)| \leq M|x - y|.$$

In particolare, se f è integrabile, la funzione ϕ è una funzione continua. □

Esercizio 4.2. *Consideriamo la funzione $f(x) = \operatorname{sgn} x$. Sapete riconoscere la funzione ϕ data in* (34) *in questo caso?*

Esercizio 4.3. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrabile in ogni intervallo $[a, b]$ di $\mathbb{R}$ e sia*

$$\phi(x) := \int_0^x f(t)\,dt$$

(i) Dimostrare che, se $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora ϕ è non decrescente.
(ii) Disegnare qualitativamente il grafico di ϕ nel caso in cui $xf(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$.

[3]Tale funzione, come vedremo, si dimostra essere uguale al logaritmo naturale e la formula precedente può quindi essere scelta come definizione analitica di $\ln x$.

Una volta stabilito che la funzione integrale ϕ è sempre lipschitziana, è naturale domandarsi se essa sia anche derivabile. Consideriamone il rapporto incrementale

$$\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}=\frac{1}{h}\left[\int\limits_{\alpha}^{x+h} f(t)\,dt-\int\limits_{\alpha}^{x} f(t)\,dt\right]=\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt$$

(l'ultima uguaglianza è conseguenza delle proprietà di additività dell'integrale). Supponendo che la funzione integranda f sia continua, è possibile applicare il Teorema della Media Integrale, Teorema 3.1, e riscrivere il rapporto incrementale come

$$\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}=f(\xi)$$

con ξ compreso tra x e $x+h$. Passando al limite $h\to 0$, dato che $\xi\to x$, si ha

$$\phi'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}=\lim_{h\to 0} f(\xi)=f(x).$$

Abbiamo quindi dimostrato il seguente risultato.

Teorema 4.4. *Sia $f\in C([a,b])$, $\alpha\in[a,b]$ e $\phi(x)=\int\limits_{\alpha}^{x} f(t)\,dt$ per $x\in[a,b]$. Allora ϕ è derivabile in $[a,b]$ e $\phi'(x)=f(x)$.*

Una prima conseguenza (pratica) notevole è che, dato che siamo in grado di calcolarne la derivata, possiamo dedurre molte proprietà qualitative importanti anche per una funzione che non sia espressa direttamente tramite funzioni elementari, ma come integrale di una funzione elementare.

Esempio 4.5. Consideriamo la funzione

$$\textsf{funzione degli errori:}\quad \mathrm{Erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt,$$

Dal Teorema 4.4 deduciamo che $D\left(\mathrm{Erf}(x)\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}>0$, quindi $\mathrm{Erf}(x)$ è strettamente crescente. Con una tecnologia più avanzata di quella che ci è disponibile a questo livello, è possibile dimostrare che $Erf(\pm\infty)=\pm 1$.

Il Teorema 4.4 risolve anche un problema interessante:

data f, trovare una funzione F che risolva l'equazione $F'=f$.

L'equazione $F'=f$ è un'*equazione differenziale* in cui il dato è la funzione f e l'incognita è la funzione F. Una soluzione F di questa equazione si dice primitiva di f. Il Teorema 4.4 afferma che se $f\in C([a,b])$ il problema $F'=f$ ammette almeno una soluzione (data dalla funzione integrale ϕ), cioè esiste sempre almeno una primitiva. Da questo punto di vista *si può intepretare l'operazione di integrazione come l'operazione* *inversa della derivazione.* Tale operazione di inversione è univocamente definita? In altri termini, data una funzione f, quante primitive esistono?

TEOREMA 4.6. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e siano F e G due sue primitive. Allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che*

$$F(x) - G(x) = c \qquad \textit{per ogni} \quad x \in [a, b].$$

DIMOSTRAZIONE. La derivata della funzione differenza $F - G$ è nulla:

$$(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Per quanto già visto, la differenza $F - G$ deve essere costante. □

Quindi, se $f \in C([a, b])$, l'equazione $F' = f$ è completamente risolta: tutte le soluzioni sono della forma

$$\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt + c \qquad c \in \mathbb{R}.$$

La classe delle primitive della funzione f si indica con

$$\int f(x)\,dx,$$

e si chiama integrale indefinito di f. Si noti bene che l'integrale indefinito di una funzione indica una classe di funzioni, e non una singola funzione.

Ad eterna memoria, sintetizziamo i due risultati enunciati in un'unico Teorema.

TEOREMA 4.7. Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale. *Data $f \in C([a, b])$, le soluzioni dell'equazione differenziale $F' = f$ sono tutte e sole della forma*

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt + c, \qquad \textit{con} \quad \alpha \in [a, b] \quad \textit{e} \quad c \in \mathbb{R}.$$

Se si cerca una primitiva F di una funzione f con la richiesta aggiuntiva che la funzione F valga in un punto assegnato x_0 un valore dato y_0, cioè se si vuole risolvere

(35) dati $f \in C([a, b])$, $x_0 \in [a, b]$, $y_0 \in \mathbb{R}$, trovare F tale che $\begin{cases} F'(x) = f(x), \\ F(x_0) = y_0, \end{cases}$

la soluzione F esiste, è unica ed è data da

$$F(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt. \tag{36}$$

Il problema (35) rientra nella classe dei *problemi di Cauchy* per equazioni differenziali.

OSSERVAZIONE 4.8. Il problema di Cauchy può essere interpretato in termini di moto di un particella. Se $f(x)$ è la velocità della particella all'istante x e y_0 la sua posizione all'istante iniziale x_0, la soluzione $F = F(x)$, definita in (36), del problema di Cauchy (35), rappresenta la posizione della particella all'istante x.

Primitive e calcolo degli integrali definiti. Il Teorema fondamentale del calcolo ha una conseguenza interessante che riguarda il calcolo esplicito di integrali definiti. Supponiamo di voler calcolare

$$\int_a^b f(t)\,dt. \tag{37}$$

e supponiamo di conoscere già (per altre vie) una primitiva della funzione f, cioè una funzione F tale che $F' = f$. Sappiamo che anche la funzione integrale definita in (34) è una primitiva di f e, quindi, per il Teorema Fondamentale del Calcolo, differisce da F per una costante, cioè $\phi(x) = F(x) + c$ per qualche $c \in \mathbb{R}$. La costante c può essere determinata, calcolando in $x = a$:

$$0 = \phi(a) = F(a) + c \qquad \Longrightarrow \qquad c = -F(a).$$

Si deduce quindi che $\phi(x) = F(x) - F(a)$ e quindi

$$\int_a^b f(t)\,dt = \phi(b) = F(b) - F(a).$$

Quindi, *se si conosce una primitiva F della funzione f, l'integrale definito di f in $[a, b]$ è uguale alla differenza dei valori della primitiva in b e in a*, cioè

$$F' = f \qquad \Longrightarrow \qquad \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

La differenza $F(b) - F(a)$ si indica anche con $F(x)\Big|_a^b$, o $\Big[F(x)\Big]_a^b$.

Esempio 4.9. Consideriamo la funzione $f(x) = x^2$. Dato che $D(x^3) = 3x^2$, si ha

$$D\left(\frac{1}{3}\,x^3\right) = x^2,$$

quindi una primitiva di x^2 è $x^3/3$. Otteniamo perciò

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}\,x^3\,\Big|_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3},$$

che è proprio la formula calcolata ad inizio Capitolo. Più in generale, dato che

$$D\left(\frac{1}{n+1}\,x^{n+1}\right) = x^n,$$

vale la formula

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1}\,\Big|_a^b = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}).$$

CAPITOLO 4

Zoologia dell'integrazione

Per iniziare, ricordiamo i fatti principali che abbiamo visto sugli integrali indefiniti.
– Data una funzione f, si dice che F è una primitiva di f se $F' = f$; la famiglia di primitive di una funzione f si indica con il simbolo

$$\int f(x)\,dx.$$

Se la funzione f è considerata in un intervallo, tutte le primitive di f sono uguali a meno di una costante additiva, cioè, data F primitiva di f,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad C \in \mathbb{R}.$$

– Se la funzione F è una primitiva della funzione f, allora vale

$$F' = f \qquad \Longrightarrow \qquad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

In questo Capitolo ci poniamo il problema di determinare *esplicitamente* primitive F di una funzione data f, per opportune classi di funzioni. Cosa si intende qui con "primitive esplicite"? A partire dalle operazioni elementari (addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione) e dalle funzioni trigonometriche ed esponenziali, formando inverse e composte di queste funzioni, è possibile costruire una classe molto ampia di funzioni che possiamo descrivere come "funzioni esplicite".

Per quanto riguarda l'operazione di derivazione, la derivata di una funzione esplicita è essa stessa una funzione esplicita. Al contrario, per l'integrazione la situazione è differente: *non è vero che tutti gli integrali delle funzioni esplicite si possano scrivere in termini di funzioni esplicite* (ad esempio, non è possibile esprimere in forma "esplicita", le primitive di e^{-x^2}). Questo risultato può suonare sorprendente, ma è un fatto della vita. Prendere o lasciare.

Una prima classe di funzioni che sono esplicitamente integrabili si determina a partire dal *teorema fondamentale del calcolo*, che, come noto, afferma

$$F'(x) = f(x) \qquad \Rightarrow \qquad \int f(x)\,dx = F(x) + \text{costante}.$$

In particolare, questa proprietà indica che *ad ogni regola di derivazione corrisponde una regola di integrazione.* Ad esempio

$$D(x^{\alpha+1}) = (\alpha+1)x^{\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad \int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \text{costante} \qquad \forall\,\alpha \neq -1.$$

Allo stesso modo si ottengono altre formule elementari:

$$\begin{aligned}
&\int \sin x\,dx = -\cos x + C, && \int \cos x\,dx = \sin x + C,\\
&\int e^x\,dx = e^x + C, && \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,\\
&\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C, && \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\\
&\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C, && \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C,\\
&\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, && \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C,\\
&\int \sinh x\,dx = \cosh x + C && \int \cosh x\,dx = \sinh x + C.
\end{aligned}$$

Inoltre, grazie alla linearità dell'integrale, anche combinazioni lineari di funzioni di cui si conosce la primitiva, possono essere integrate esplicitamente. Ad esempio,

$$\int (1+2x+3e^x)\,dx = \int 1\,dx + 2\int x\,dx + 3\int e^x\,dx = x + x^2 + 3e^x + C.$$

Tramite queste formule è possibile calcolare il valore di certi integrali definiti, senza bisogno di passare per le approssimazioni con somme integrali per eccesso e per difetto.

Passiamo ora a sviluppare i due metodi principali da affiancare alle formule di integrazione elementari: l'integrazione per sostituzione e l'integrazione per parti. Entrambi, in sostanza, discendono da formule di derivazione: il primo discende dalla derivazione di funzione composta, il secondo dalla derivazione della funzione prodotto.

1. Metodo di sostituzione

Il *metodo di sostituzione* consiste nell'introduzione di una nuova variabile, cioè, moralmente, nel "cambiare punto di vista" e osservare lo stesso oggetto da un'altra posizione. La formula di derivazione di funzione composta assicura che

$$\Big(F(\phi(u))\Big)' = F'(\phi(u))\phi'(u). \tag{38}$$

Tale formula, letta in termini di integrazione, diviene

$$\int F'(\phi(x))\phi'(x)\,dx = F(\phi(x)) + \text{costante} \tag{39}$$

Ad esempio,

$$\int 2x\cos(x^2)\,dx = \sin(x^2) + \text{costante},$$

dove $F(s) = \sin s$ e $\phi(x) = x^2$. Vediamo un altro esempio. Calcoliamo

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx.$$

Dato che $D(\ln x) = 1/x$, qui $F(s) = s$ e $\phi(x) = \ln x$. Quindi

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \ln x(\ln x)'\,dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \text{costante}.$$

Ma *come individuare una decomposizione della funzione integranda come in (39)?* Occorre esercizio ed esperienza (anche una certa dose di intuizione non guasta!).

Vediamo la formula di sostituzione per integrali definiti: integriamo la formula (38) nell'intervallo $[\alpha, \beta]$,

$$F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = \int_\alpha^\beta (F(\phi(u))'\,du = \int_\alpha^\beta F'(\phi(u))\phi'(u)\,du.$$

Ponendo $a = \phi(\alpha)$ e $b = \phi(\beta)$,

$$F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\,dx.$$

Quindi otteniamo la formula

$$\int_\alpha^\beta F'(\phi(u))\phi'(u)\,du = \int_a^b F'(x)\,dx,$$

che, chiamando $f = F'$, può essere riscritta come

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(u))\phi'(u)\,du = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{con} \quad \begin{cases} a = \phi(\alpha) \\ b = \phi(\beta) \end{cases} \tag{40}$$

Questa formula esprime come si trasforma l'espressione dell'integrale cambiando la variabile di integrazione. Se, per calcolare $\int_a^b f(x)\,dx$, decidiamo di porre $x = \phi(u)$, dobbiamo sostituire formalmente dx con $\phi'(u)\,du$ e cambiare gli estremi compatibilmente con la formula che collega x con u, cioè $x = \phi(u)$. Ad esempio, per calcolare

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx,$$

poniamo $x = \ln u$. Dato che $\phi(u) = \ln u$, dobbiamo sostituire dx con $\frac{1}{u}\,du$:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int_\alpha^\beta \frac{u}{1+u^2}\,\frac{1}{u}\,du.$$

Rimangono da calcolare α e β che sono soluzione di $0 = \phi(\alpha) = \ln\alpha$ e $1 = \phi(\beta) = \ln\beta$. Invertendo la funzione ϕ otteniamo

$$\alpha = \phi^{-1}(0) = e^0 = 1, \qquad \beta = \phi^{-1}(1) = e^1 = e.$$

In definitiva

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int_1^e \frac{u}{1+u^2}\,\frac{1}{u}\,du = \int_1^e \frac{du}{1+u^2} = \arctan e - \frac{\pi}{4}.$$

Nel caso degli integrali indefiniti la formula di sostituzione prende la forma (qui F è una primitiva di f, $F' = f$)

$$\int f(\phi(u))\phi'(u)\,du = \int f(x)\,dx = F(x) + C = F(\phi(u)) + C \tag{41}$$

Anche in questo caso si può usare, come regola mnemonica, la relazione

$$x = \phi(u) \qquad \Rightarrow \qquad \text{“}\phi'(u)\,du = dx\text{”}.$$

L'uso delle virgolette “ ” sta a ricordare che non è stato dato senso ai simboli du e dx e che la regola suscritta è solo formale[1]. Nell'uso di questa formula bisona ricordarsi di tornare alla fine alla variabile u, sostituendo x con $\phi(u)$.

Esempio 1.1. Sia ϕ una funzione derivabile. Calcoliamo

$$\int \frac{\phi'(u)}{\phi(u)}\,du.$$

Ponendo $x = \phi(u)$, si ha $dx = \phi'(u)\,du$, quindi

$$\int \frac{\phi'(u)}{\phi(u)}\,du = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C = \ln|\phi(u)| + C.$$

Ad esempio,

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln|\ln x| + C, \qquad \int \tan x\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + C.$$

Esempio 1.2. Allo stesso modo, ponendo $x = \phi(u)$ (e quindi $dx = \phi'(u)\,du$),

$$\int [\phi(u)]^\alpha\,\phi'(u)\,du = \int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C = \frac{1}{\alpha+1}\,[\phi(u)]^{\alpha+1} + C \quad \alpha \neq -1.$$

Ad esempio,

$$\int \sin^k x\,\cos x\,dx = \frac{1}{k+1}\,\sin^{k+1} x + C.$$

[1]Se si pensa all'origine del simbolo dx negli integrali come limite della lunghezza Δx di una data partizione, la sostituzione da dx a du, con il relativo termine moltiplicativo $\phi'(u)$, indica che, nel cambio di variabile, bisogna cambiare opportunamente anche la lunghezza dell'intervallo della partizione, coerentemente con la trasformazione utilizzata.

La formula di sostituzione è sempre conveniente nel caso di funzioni composte di cui l'ultima sia lineare: ponendo $x = au + b$

$$\int f(au+b)\,du = \frac{1}{a}\int f(x)\,dx.$$

Anche se l'integrale di destra non fosse risolvibile, l'espressione a secondo membro è comunque più semplice.

Spesso ci si trova a lavorare con espressioni della forma

$$\int h(\phi(u))\,du,$$

dove l'integrando è una funzione composta $h(\phi(u))$, *senza il fattore moltiplicativo* $\phi'(u)$. E' possibile applicare la sostituzione $x = \phi(u)$? Se la funzione ϕ è invertibile, con inversa $u = \psi(x)$, è possibile sostituire a du l'oggetto $\psi'(x)\,dx$, ottenendo

$$\int h(\phi(u))\,du = \int h(x)\,\psi'(x)\,dx.$$

Per giustificare in modo rigoroso questa formula, chiamiamo $f(u) := h(\phi(u))$

$$\int h(\phi(u))\,du = \int f(u)\,du = \int f(\psi(x))\psi'(x)\,dx = \int h(x)\psi'(x)\,dx.$$

Nel caso di integrali definiti occorre cambiare gli estremi di integrazione coerentemente con la nuova variabile introdotta:

$$\int_a^b h(\phi(u))\,du = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} h(x)\,\psi'(x)\,dx.$$

Esempio 1.3. Calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int (1+e^x)^2\,dx.$$

Ponendo $t = 1 + e^x$, si ha $x = \ln(t-1)$ e $dx = \frac{1}{t-1}\,dt$ e, di conseguenza,

$$\int (1+e^x)^2\,dx = \int \frac{t^2}{t-1}\,dt.$$

Dato che $\frac{t^2}{t-1} = t + 1 + \frac{1}{t-1}$,

$$\begin{aligned}\int (1+e^x)^2\,dx &= \int \left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt = \frac{1}{2}t^2 + t + \ln|t-1| + C\\ &= \frac{1}{2}(1+e^x)^2 + 1 + e^x + x + C = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x + C.\end{aligned}$$

Si sarebbe anche potuto procedere utilizzando la decomposzione $(1+e^x)^2 = 1+2e^x+e^{2x}$ e integrando a partire dalle formule elementari.

Esempio 1.4. Calcoliamo l'integrale definito

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx.$$

Dato che $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \Big(\cos(2x) + 1\Big)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos(2x)\, dx + \frac{\pi}{4}.$$

Poniamo nell'integrale $t = 2x$:

$$\int_0^{\pi/2} \cos(2x)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos t\, dt = \frac{1}{2}\sin t\Big|_0^{\pi} = 0.$$

Quindi il valore dell'integrale è $\pi/4$.

Esercizio 1.5. Fissato $a > 0$, calcolare gli integrali (indefinito e definito)

$$\int x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

Esempio 1.6. Dati $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che $\Delta := B^2 - 4AC < 0$, come risolvere

$$\int \frac{dx}{Ax^2 + Bx + C} \qquad ? \tag{42}$$

La condizione $\Delta < 0$, implica che il polinomio è irriducibile (non ha radici reali). In questa classe di integrali rientra un integrale che conosciamo:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \arctan x + C. \tag{43}$$

L'integrale (42) può essere risolto con una sostituzione opportuna che lo riconduce a (43). Invece di dare direttamente la soluzione, proviamo a ricostruire passo passo come possa essere ottenuta.

Il grafico della funzione $\frac{1}{Ax^2+Bx+C}$ è qualitativamente simile a quello della funzione $\frac{1}{x^2+1}$ (Fig.1). È possibile con traslazioni e dilatazioni trasformare il grafico della prima

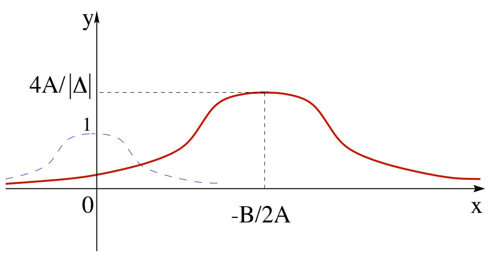

Figura 1. Il grafico della funzione $\frac{1}{Ax^2+Bx+C}$ (e, tratteggiato, quello di $\frac{1}{x^2+1}$).

funzione in quello della seconda? Bisogna prima di tutto correggere due "difetti" evidenti di $f(x) = \frac{1}{Ax^2+Bx+C}$: il valore massimo è $f(-B/2A) = 4A/|\Delta|$ e non 1, l'asse di simmetria è $x = -B/2A$ e non $x = 0$. Per il primo problema, basta utilizzare la linearità dell'integrale: la funzione f può essere riscritta come

$$f(x) = \frac{4A}{|\Delta|}\,g(x) \qquad \text{dove} \quad g(x) := \frac{1}{\frac{4A^2}{|\Delta|}\,x^2 + \frac{4AB}{|\Delta|}\,x + \frac{4AC}{|\Delta|}},$$

quindi

$$\int \frac{dx}{Ax^2+Bx+C} = \frac{4A}{|\Delta|}\int \frac{dx}{\frac{4A^2}{|\Delta|}\,x^2 + \frac{4AB}{|\Delta|}\,x + \frac{4AC}{|\Delta|}},$$

dove la funzione all'interno dell'ultimo integrale vale 1 in $x = -B/2A$.

Per fare in modo che l'asse di simmetria sia in $x = 0$, bisogna traslare il grafico. Questo corrisponde ad introdurre una nuova variabile u, legata ad x dalla relazione

$$u = x + \frac{B}{2A}.$$

Con questa scelta, si ha $\frac{4A^2}{|\Delta|}\,x^2 + \frac{4AB}{|\Delta|}\,x + \frac{4AC}{|\Delta|} = \frac{4A^2}{|\Delta|}\,u^2 + 1$, quindi

$$\int \frac{dx}{Ax^2+Bx+C} = \frac{4A}{|\Delta|}\int \frac{du}{\frac{4A^2}{|\Delta|}\,u^2+1} = \frac{4A}{|\Delta|}\int \frac{du}{\left(\frac{2A}{|\Delta|^{1/2}}\,u\right)^2+1}.$$

Resta da modificare ancora una volta la variabile u, attraverso la posizione

$$v := \frac{2A}{|\Delta|^{1/2}}\,u,$$

che consiste nel dilatare/comprimere (dipende dalla grandezza di $\frac{2A}{|\Delta|^{1/2}}$) la variabile u per un fattore opportuno. Così facendo si arriva alla conclusione:

$$\int \frac{dx}{Ax^2+Bx+C} = \frac{4A}{|\Delta|}\int \frac{du}{\left(\frac{2A}{|\Delta|^{1/2}}\,u\right)^2+1} = \frac{2}{|\Delta|^{1/2}}\int \frac{dv}{v^2+1} = \frac{2}{|\Delta|^{1/2}}\arctan v + \text{costante}.$$

Per avere l'espressione della primitiva in x (e non in v), basta seguire a ritroso le definizioni di v e di u. In definitiva: (qui $|\Delta| = 4AC - B^2$)

$$\int \frac{dx}{Ax^2+Bx+C} = \frac{2}{\sqrt{|\Delta|}}\arctan\left(\frac{2Ax+B}{\sqrt{|\Delta|}}\right) + \text{costante}.$$

2. Integrazione per parti

Il metodo di *integrazione per parti* emerge dalla formula di derivazione del prodotto: $(fg)' = f'g + fg'$. Integrando tale formula, si ottiene

$$f(x)g(x) = \int g(x)\,f'(x)\,dx + \int g'(x)\,f(x)\,dx$$

da cui la formula di integrazione per parti

$$\int g'(x)\, f(x)\, dx = f(x)g(x) - \int g(x)\, f'(x)\, dx. \tag{44}$$

Questa formula è nota come integrazione per parti. Il metodo è vantaggioso se per il termine $g\, f'$ si conosce un metodo di integrazione.

Per gli integrali definiti, la formula (44) diviene

$$\int_a^b g'(x)\, f(x)\, dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)\, f'(x)\, dx. \tag{45}$$

Esempio 2.1. Ecco un primo esempio di applicazione della formula (44)

$$\int xe^x\, dx = \int x(e^x)'\, dx = xe^x - \int (x)'\, e^x\, dx = xe^x - \int e^x\, dx = (x-1)e^x + C.$$

Anche nel caso della funzione x^2e^x si può procedere in modo analogo, applicando due volte l'integrazione per parti,

$$\begin{aligned}\int x^2e^x\, dx &= \int x^2(e^x)'\, dx = x^2e^x - 2\int x\, e^x\, dx = x^2e^x - 2\left[xe^x - \int e^x\, dx\right]\\ &= x^2e^x - 2\,[(x-1)e^x + C] = (x^2 - 2x + 2)e^x + C.\end{aligned}$$

È possibile risolvere allo stesso modo un qualsiasi integrale del tipo

$$\int p(x)e^x\, dx \qquad\qquad p \quad \text{polinomio di grado } n,$$

infatti basta iterare n volte l'uso della formula di integrazione per parti

$$\begin{aligned}\int p(x)e^x\, dx &= p(x)e^x - \int p'(x)e^x\, dx = \big[p(x) - p'(x)\big]e^x + \int p''(x)e^x\, dx\\ &= \cdots = \big[p(x) - p'(x) + \cdots + (-1)^n p^{(n)}(x)\big]e^x + C\end{aligned}$$

Osservando che $e^{\alpha x} = \frac{1}{\alpha}\big(e^{\alpha x}\big)'$, si possono determinare le primitive anche di funzioni del tipo $p(x)e^{\alpha x}$ con p polinomio. Ad esempio,

$$\begin{aligned}\int x^2e^{3x}\, dx &= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}\, dx\\ &= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}\left(xe^{3x} - \int e^{3x}\, dx\right) = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}\right)e^{3x} + C.\end{aligned}$$

Esempio 2.2. Anche funzioni del tipo prodotto di polinomio e di $\sin x$ o $\cos x$ possono essere risolte integrando per parti. I casi più semplici sono

$$\int x\sin x\, dx = \int x(-\cos x)'\, dx = -x\cos x + \int \cos x\, dx = \sin x - x\cos x + C;$$

$$\int x\cos x\, dx = \int x(\sin x)'\, dx = x\sin x - \int \sin x\, dx = \cos x + x\sin x + C.$$

Iterando il procedimento un certo numero di volte, si calcolano gli integrali

$$\int p(x)\sin(ax)\,dx, \qquad \int p(x)\cos(ax)\,dx \qquad (a\in\mathbb{R}).$$

Esempio 2.3. Proponiamoci di determinare tutte le primitive di $x^2\sin(2x)$. Applichiamo l'integrazione per parti:

$$\begin{aligned}\int x^2\sin(2x)\,dx &= \int x^2\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)'\,dx = -\frac{1}{2}\,x^2\cos(2x)+\int x\cos(2x)\,dx\\ &= -\frac{1}{2}\,x^2\cos(2x)+\frac{1}{2}\int x\,(\sin(2x))'\,dx\\ &= -\frac{1}{2}\,x^2\cos(2x)+\frac{1}{2}\,x\sin(2x)-\frac{1}{2}\int\sin(2x)\,dx\\ &= -\frac{1}{2}\,x^2\cos(2x)+\frac{1}{2}\,x\sin(2x)+\frac{1}{4}\cos(2x)+C.\end{aligned}$$

Esempio 2.4. Sempre tramite l'integrazione per parti, si risolvono anche

$$\int p(x)\ln x\,dx \qquad\qquad p\quad \text{polinomio.}$$

Calcoliamo l'integrale di $\ln x$:

$$\begin{aligned}\int \ln x\,dx &= \int 1\cdot\ln x\,dx = \int (x)'\ln x\,dx = x\ln x-\int x(\ln x)'\,dx\\ &= x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + C.\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\int x\ln x\,dx = \int\left(\frac{1}{2}x^2\right)'\ln x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C.$$

In generale, dato $k\in\mathbb{N}$,

$$\int x^k\ln x\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}\ln x-\frac{1}{k+1}\int x^k\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}\left(\ln x-\frac{1}{k+1}\right)+C.$$

Esercizio 2.5. *Calcolare gli integrale indefiniti*

$$\int \arctan x\,dx, \qquad \int x\arctan x\,dx.$$

Esempio 2.6. Qui usiamo l'integrazione per parti in un modo leggermente diverso: iterando l'applicazione di (44) torniamo all'integrale originale, ottenendo in questo modo un'equazione per la primitiva. In questo modo risolviamo integrali della forma

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx, \qquad \int e^{ax}\cos(bx)\,dx.$$

Ad esempio,

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\sin(3x)\,dx &= \frac{1}{3}\int e^{2x}(-\cos(3x))'\,dx = -\frac{1}{3}\cos(3x)e^{2x} + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos(3x)\,dx \\ &= -\frac{1}{3}\cos(3x)e^{2x} + \frac{2}{9}\int e^{2x}(\sin(3x))'\,dx \\ &= \frac{1}{9}\left(2\sin(3x) - 3\cos(3x)\right)e^{2x} - \frac{4}{9}\int e^{2x}\sin(3x)\,dx.\end{aligned}$$

Guardando il primo e l'ultimo termine, si ha

$$\int e^{2x}\sin(3x)\,dx = \frac{1}{9}\big(2\sin(3x) - 3\cos(3x)\big)e^{2x} - \frac{4}{9}\int e^{2x}\sin(3x)\,dx,$$

da cui, esplicitando rispetto all'integrale richiesto,

$$\int e^{2x}\sin(3x)\,dx = \frac{1}{13}\big(2\sin(3x) - 3\cos(3x)\big)e^{2x} + C.$$

In generale si ottengono le formule (verificare!)

$$\begin{aligned}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx &= \frac{1}{a^2+b^2}\left(a\sin(bx) - b\cos(bx)\right)e^{ax} + C, \\ \int e^{ax}\cos(bx)\,dx &= \frac{1}{a^2+b^2}\left(a\cos(bx) - b\sin(bx)\right)e^{ax} + C.\end{aligned}$$

Formule ricorsive. Alcune famiglie di integrali (dipendenti da un parametro discreto $n \in \mathbb{N}$), possono essere risolte in modo iterativo, cioè si risolve l'integrale per $n = 1$, e poi si mostra come l'integrale al passo $n-$esimo si possa ricondurre al calcolo dell'integrale $(n-1)-$esimo. Vediamo un paio di esempi. Calcoliamo

$$I_n = \int \sin^{2n} x\,dx, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Allo stesso modo si può calcolare $\int \cos^{2n} x\,dx$. Calcoliamo I_1:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\,dx &= \int \sin x \cdot \sin x\,dx = \int \sin x\,(-\cos x)'\,dx = -\sin x\cos x + \int \cos^2 x\,dx \\ &= -\sin x\cos x + \int (1-\sin^2 x)\,dx = x - \sin x\cos x - \int \sin^2 x\,dx.\end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto una relazione del tipo $I_1 = x - \sin x\cos x - I_1$, quindi

$$I_1 = \int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x) + C.$$

Per $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int \sin^{2n+1} x \, \sin x \, dx = \int \sin^{2n+1} x \, (-\cos x)' \, dx \\
&= -\sin^{2n+1} x \, \cos x + (2n+1) \int \sin^{2n} x \, \cos^2 x \, dx \\
&= -\sin^{2n+1} x \, \cos x + (2n+1) \int \sin^{2n} x (1 - \sin^2 x) \, dx \\
&= -\sin^{2n+1} x \, \cos x + (2n+1) I_n - (2n+1) I_{n+1}.
\end{aligned}$$

Quindi $I_{n+1} = -\sin^{2n+1} x \, \cos x + (2n+1)I_n - (2n+1)I_{n+1}$, da cui si deduce

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n+2} \left\{ (2n+1)I_n - \sin^{2n+1} x \cos x \right\} + C.$$

3. Integrazione di funzioni razionali

Affrontiamo ora il problema di integrare funzioni razionali:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \, dx \qquad P, Q \text{ polinomi.}$$

Le primitive di una qualsiasi funzione razionale in termini di funzioni esplicite sono note, ma non è in queste Note che troverete i dettagli della questione.

In concreto è possibile completare il calcolo a patto di saper fattorizzare il polinomio a denominatore Q nel prodotto di termini irrudicibili, cioè polinomi di primo grado (con molteplicità opportuna) e polinomi di secondo grado irriducibili (con molteplicità opportuna). In questo Paragrafo vedremo come si integrino funzioni razionali nel caso in cui il polinomio Q sia di grado al più due, o sia fattorizzabile in termini di polinomi di grado 1, cioè sia riscrivibile nella forma

$$Q(x) = a(x - x_1)^{k_1} \cdots (x - x_n)^{k_n} \qquad a, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0, \quad k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}.$$

Denominatore Q di grado 1. Sia $Q(x) = a(x - x_0)$ con $a, x_0 \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Se P è un polinomio di grado $p \geq 1$, tramite l'algoritmo di divisione dei polinomi, si determinano un polinomio P_1 di grado $p - 1$ e una costante $r \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{r}{a(x - x_0)}.$$

Quindi l'integrale si può decomporre nella somma di due integrali

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \, dx = \int P_1(x) \, dx + \frac{r}{a} \int \frac{dx}{x - x_0}.$$

Il polinomio P_1 è integrabile esplicitamente, grazie alla formula

$$\int x^k \, dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C.$$

Anche l'altro integrale è risolubile esplicitamente:

$$\frac{r}{a}\int \frac{dx}{x-x_0} = \frac{r}{a}\int \frac{(x-x_0)'}{x-x_0}\,dx = \frac{r}{a}\ln|x-x_0| + C.$$

Vediamo un esempio. Calcoliamo

$$\int \frac{x^5+1}{x-2}\,dx.$$

Dato che

$$\frac{x^5+1}{x-2} = x^4+2x^3+4x^2+8x+16+\frac{33}{x-2},$$

si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{x^5+1}{x-2}\,dx &= \int \left(x^4+2x^3+4x^2+8x+16+\frac{33}{x-2}\right)dx\\ &= \frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^4+\frac{4}{3}x^3+4x^2+16x+33\ln|x-2|+C.\end{aligned}$$

Denominatore Q di grado 2. Supponiamo che Q sia un polinomio di grado 2. In questo caso Q è scrivibile nella forma

$$Q(x) = a(x^2+2bx+c) \qquad a,b,c\in\mathbb{R}, \quad a\neq 0.$$

Se il polinomio a numeratore P ha grado $p\geq 2$, allora è possibile applicare l'algoritmo di divisione di polinomi e riscrivere la funzione razionale come somma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}, \tag{46}$$

dove P_1 è un polinomio di grado $p-2$ e R è un polinomio di grado minore o uguale a 1. L'integrale della funzione razionale è la somma di due integrali

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int P_1(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx.$$

Il primo dei due integrali è risolubile esplicitamente per via elementare. Consideriamo il secondo. Supponiamo che il resto R sia di grado 1 e scriviamolo nella forma $R(x) = \alpha(x+\beta)$ con $\alpha\neq 0$ e $\beta\in\mathbb{R}$. Si tratta di calcolare

$$\int \frac{\alpha(x+\beta)}{a(x^2+2bx+c)}\,dx = \frac{\alpha}{a}\int \frac{x+\beta}{x^2+2bx+c}\,dx.$$

Come primo passo, "costruiamo" a numeratore la derivata del denominatore. Moltiplichiamo e dividiamo per due e, successivamente, sommiamo e sottraiamo $2b$

$$\begin{aligned}\int \frac{\alpha(x+\beta)}{a(x^2+2bx+c)}\,dx &= \frac{\alpha}{2a}\int \frac{2x+2\beta}{x^2+2bx+c}\,dx\\ &= \frac{\alpha}{2a}\int \frac{(2x+2b)+2(\beta-b)}{x^2+2bx+c}\,dx = \cdots.\end{aligned}$$

L'integrale finale può essere riscritto come somma dei due integrali di cui il primo è della forma $\int \frac{\phi'}{\phi}\, dx$; quindi

$$\begin{aligned}\cdots &= \frac{\alpha}{2a}\int \frac{(x^2+2bx+c)'}{x^2+2bx+c}\,dx + \frac{2\alpha(\beta-b)}{2a}\int \frac{dx}{x^2+2bx+c}\\ &= \frac{\alpha}{2a}\ln|x^2+2bx+c| + \frac{2\alpha(\beta-b)}{2a}\int \frac{dx}{x^2+2bx+c}.\end{aligned}$$

Rimane quindi da risolvere l'integrale

$$\int \frac{dx}{x^2+2bx+c}. \tag{47}$$

Nel caso in cui R in (46) sia di grado 0 ci si riconduce direttamente a questa situazione. La risoluzione dell'integrale (47) varia a seconda di quante radici reali abbia il denominatore, cioè a seconda che sia $b^2 > c$, $b^2 = c$ o $b^2 < c$. Trattiamo i tre casi separatemente. Ci ricondurremo (sostanzialmente) ai seguenti integrali elementari

$$\begin{aligned}&\textsf{Caso I}: && b^2 > c && \longrightarrow && \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,\\ &\textsf{Caso II}: && b^2 = c && \longrightarrow && \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C,\\ &\textsf{Caso III}: && b^2 < c && \longrightarrow && \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C.\end{aligned}$$

Caso I: $b^2 > c$. In questo caso il denominatore ha due radici reali

$$x^2+2bx+c = 0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad x = -b \pm \sqrt{b^2-c}.$$

Indicando le radici con x_1 e x_2, il polinomio si fattorizza:

$$x^2+2bx+c = (x-x_1)(x-x_2).$$

Decomponiamo la funzione integranda nella forma

$$\frac{1}{x^2+2bx+c} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2},$$

dove $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ sono due costanti da determinare. La somma delle due frazioni a secondo membro è uguale a

$$\frac{(A_1+A_2)x - (A_1x_2 + A_2x_1)}{x^2+2bx+c},$$

e quindi A_1 e A_2 devono essere tali che $(A_1+A_2)x - (A_1x_2+A_2x_1) = 1$. Dato che due polinomi coincidono se e solo se coincidono i loro coefficienti, le costanti A_1, A_2 sono le soluzioni del sistema lineare (il cui determinante è $x_1 - x_2$ che, nel caso $b^2 > c$, è diverso da zero)

$$A_1 + A_2 = 0, \qquad A_1x_2 + A_2x_1 = -1.$$

Individuati i valori di A_1 e A_2, l'integrale è risolto:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+2bx+c} &= A_1 \int \frac{dx}{x-x_1} + A_2 \int \frac{dx}{x-x_2} \\ &= A_1 \ln|x-x_1| + A_2 \ln|x-x_2| + C.\end{aligned}$$

Esercizio 3.1. *Calcolare*

$$\int \frac{x^3}{x^2-x-2}\,dx.$$

Caso II: $b^2 = c$. In questa situazione, si tratta di risolvere

$$\int \frac{dx}{x^2+2bx+b^2}.$$

Questo integrale è immediato, infatti

$$\int \frac{dx}{x^2+2bx+b^2} = \int \frac{dx}{(x+b)^2} = -\frac{1}{x+b} + C.$$

Esercizio 3.2. *Calcolare*

$$\int \frac{x(x+3)}{(x-1)^2}\,dx.$$

Caso III: $b^2 < c$. Questo caso è già stato considerato nell'Esempio 1.6. Ritroviamo qui la stessa soluzione senza fare ricorso al grafico della funzione integranda.

Dato che il polinomio $x^2+2bx+c$ è irriducibile, l'obiettivo è di ricondursi, con un opportuno cambiamento di variabili, all'integrale elementare

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C.$$

Chiamiamo $\nu := \frac{1}{\sqrt{c-b^2}} > 0$ e riscriviamo in maniera opportuna il denominatore

$$x^2+2bx+c = x^2+2bx+b^2+(c-b^2) = (x+b)^2 + \frac{1}{\nu^2} = \frac{1}{\nu^2}\left\{[\nu(x+b)]^2+1\right\}.$$

Ponendo $t = \nu(x+b)$,

$$\int \frac{dx}{x^2+2bx+c} = \nu \int \frac{dt}{1+t^2} = \nu \arctan t + C = \nu \arctan\big(\nu(x+b)\big) + C.$$

Dalla definizione di ν si deduce che

$$\int \frac{dx}{x^2+2bx+c} = \frac{1}{\sqrt{c-b^2}} \arctan\left(\frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}\right) + C.$$

Esercizio 3.3. *Calcolare*

$$\int \frac{3x-2}{x^2-2x+2}\,dx.$$

Denominatore Q con sole radici reali. Consideriamo prima di tutto un caso semplice: il polinomio Q ha radici reali *distinte*, cioè

$$Q(x) = a(x - x_1)\cdots(x - x_n) \qquad x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \quad \text{con } x_i \neq x_j \quad \text{se} \quad i \neq j.$$

Se $p \geq n$, il primo passaggio è sempre lo stesso: si usa l'algoritmo della divisione di polinomi per riscrivere la funzione razionale nella forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

dove P_1 è un polinomio di grado $p - n$, e R è un polinomio di grado minore di n. L'integrale si decompone in

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int P_1(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx.$$

A questo punto sfruttiamo la fattorizzazione di Q per riscrivere la funzione razionale R/Q come somma di funzioni razionali più semplici. Cerchiamo n costanti $A_1, \ldots, A_n$ tali che

$$\frac{R(x)}{a(x - x_1)\cdots(x - x_n)} = \frac{1}{a}\left(\frac{A_1}{x - x_1} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n}\right).$$

Per determinare le costanti $A_1, \ldots, A_n$ si può imporre l'uguaglianza dei due membri ottenendo un sistema lineare. Equivalentemente si può moltiplicare per $x - x_1$ entrambi i membri

$$\frac{R(x)}{a(x - x_2)\cdots(x - x_n)} = \frac{1}{a}\left\{A_1 + \frac{A_2(x - x_1)}{x - x_2} + \cdots + \frac{A_n(x - x_1)}{x - x_n}\right\}.$$

e successivamente porre $x = x_1$, ottenendo il valore di A_1

$$A_1 = \frac{R(x_1)}{(x_1 - x_2)\cdots(x_1 - x_n)}$$

Analogamente per $A_2, \ldots, A_n$. Determinate le costanti A_i, si calcola l'integrale:

$$\begin{aligned}\int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx &= \frac{1}{a}\int \left(\frac{A_1}{x - x_1} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n}\right)dx \\ &= \frac{1}{a}\left(A_1 \ln|x - x_1| + \cdots + A_n \ln|x - x_n|\right) + C.\end{aligned}$$

Per digerire la tecnica, calcoliamo

$$\int \frac{dx}{(x + 1)(x + 2)(x + 3)}.$$

Dato che il grado del numeratore è minore del grado del denominatore, non occorre applicare l'algoritmo di divisione di polinomi. Passiamo subito alla decomposizione:

cerchiamo $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{A_3}{x+3}.$$

Moltiplichiamo per $x+1$ e calcoliamo in $x=-1$

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)} = A_1 + \frac{A_2(x+1)}{x+2} + \frac{A_3(x+1)}{x+3} \qquad \Longrightarrow \qquad A_1 = \frac{1}{2}.$$

Analogamente

$$\frac{1}{(x+1)(x+3)} = \frac{A_1(x+2)}{x+1} + A_2 + \frac{A_3(x+2)}{x+3} \qquad \Longrightarrow \qquad A_2 = -1.$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A_1(x+3)}{x+1} + \frac{A_2(x+3)}{x+2} + A_3 \qquad \Longrightarrow \qquad A_3 = \frac{1}{2}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} &= \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x+3}\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}\right| + C.\end{aligned}$$

Passiamo al caso generale: il denominatore Q si decompone come

$$Q(x) = a(x-x_1)^{k_1}\cdots(x-x_n)^{k_n} \qquad a, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, \quad k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}.$$

Anche in questo caso, dopo aver applicato (se necessario) l'algoritmo di divisione di polinomi, si deve risolvere un integrale della forma

$$\int \frac{R(x)}{Q(x)}\, dx,$$

dove R è un polinomio di grado strettamente minore di quello di Q. In questo caso si cerca, analogamente a quanto fatto nel caso di Q di secondo grado con due radici coincidenti, una decomposizione della forma

$$\begin{aligned}\frac{R(x)}{a(x-x_1)^{k_1}\cdots(x-x_n)^{k_n}} = \frac{1}{a}\Bigg\{ &\frac{A_1^1}{x-x_1} + \frac{A_1^2}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{A_1^{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \cdots \\ &+ \frac{A_n^1}{x-x_n} + \frac{A_n^2}{(x-x_n)^2} + \cdots + \frac{A_n^{k_n}}{(x-x_n)^{k_n}}\Bigg\},\end{aligned}$$

dove le costanti $A_i^j \in \mathbb{R}$ con $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, k_i$ sono da determinare. Una volta determinate queste costanti, l'integrale è risolto dato che

$$\int \frac{A\, dx}{(x-\bar{x})^k} = \begin{cases} A\ln|x-\bar{x}| + C & k = 1, \\ -\dfrac{A}{k-1}\cdot\dfrac{1}{(x-\bar{x})^{k-1}} + C & k > 1. \end{cases}$$

Esempio 3.4. Ad esempio, consideriamo l'integrale
$$\int \frac{dx}{x^2(x+1)^2}.$$
In questo caso cerchiamo le costanti $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tali che
$$\frac{1}{x^2(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}.$$
Imponendo l'uguaglianza, si ottengono
$$A = -2, \quad B = 1, \quad C = 2, \quad D = 1.$$
Perciò
$$\int \frac{dx}{x^2(x+1)^2} = 2\ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + C.$$

Altre classi di funzioni. Vediamo qualche altra classe di funzioni che si possono ricondurre, tramite un cambio di variabile, all'integrale di funzioni razionali.

Esempio 3.5. Supponiamo di voler calcolare
$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx$$
dove R è una funzione razionale dei suoi argomenti. Dalle relazioni
$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{e} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{dove} \quad t = \tan\left(\frac{x}{2}\right), \tag{48}$$
ponendo $t = \tan(x/2)$ o, equivalentemente, $x = 2\arctan t$, dato che $dx = 2/(1+t^2)dt$, l'integrale si trasforma nell'integrale di una funzione razionale
$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\, dt,$$
Ad esempio,
$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2}{1+t^2}\, dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\tan(x/2)| + C.$$
$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{2\,dt}{1-t^2} = \int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right) dt = \ln\left|\frac{1+\tan(x/2)}{1-\tan(x/2)}\right| + C.$$
Non sempre la sostituzione (48) è conveniente. Ad esempio, consideriamo
$$\int \frac{\sin x}{\cos^{100} x}\, dx.$$
Tramite (48), l'integrale si trasforma in
$$\int \frac{\sin x}{\cos^{100} x}\, dx = \int \frac{4t(1+t^2)^{98}}{(1-t^2)^{100}}\, dt,$$

con un polinomio di grado duecento a denominatore! Che fare? Sarebbe invece stato molto più semplice porre $s = \cos x$, da cui

$$\int \frac{\sin x}{\cos^{100} x}\, dx = -\int \frac{ds}{s^{100}} = \frac{1}{99 s^{99}} + C = \frac{1}{99 \cos^{99} x} + C.$$

Esempio 3.6. Abbiamo un problema: calcolare l'area della regione di piano

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \,:\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\} \qquad a, b > 0.$$

L'area $|\Omega|$ di Ω è pari al valore dell'integrale definito

$$|\Omega| = 4b \int_0^a \sqrt{1 - (x^2/a^2)}\, dx.$$

Introduciamo la variabile t definita da $x = a \cos t$, da cui $dx = -a \sin t\, dt$:

$$|\Omega| = 4ab \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \cos^2 t}\, \sin t\, dt = 4ab \int_0^{\pi/2} \sin^2 t\, dt = 2ab\, [t - \sin t \cos t]_0^{\pi/2} = \pi ab.$$

Quindi l'area della regione delimitata dall'ellissi di semiassi a e b è πab.

Allo stesso modo è possibile integrare funzioni del tipo

$$R(x, \sqrt{1 - (x^2/a^2)})$$

con R funzione razionale dei suoi argomenti. Infatti

$$\int R(x, \sqrt{1 - (x^2/a^2)})\, dx = -a \int R(a \cos t, \sin t) \sin t\, dt.$$

dove $x = a \cos t$, e il secondo membro è una funzione razionale in $\sin t$ e $\cos t$.